



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ROBERTA RAFAELA TORRES ALVES

**CONTROLE PREDITIVO DE MODELO ROBUSTO CHAVEADO VIA LMI PARA  
CONTROLE DE TENSÃO DO CONVERSOR *BOOST* E SISTEMAS LPV**

MOSSORÓ - RN

2023

ROBERTA RAFAELA TORRES ALVES

**CONTROLE PREDITIVO DE MODELO ROBUSTO CHAVEADO VIA LMI PARA  
CONTROLE DE TENSÃO DO CONVERSOR *BOOST* E SISTEMAS LPV**

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada ao programa de Mestrado em Engenharia Elétrica da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-graduação da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistemas de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius Silvério Costa

Coorientador: Prof. Dr. Francisco Everton Uchôa Reis

MOSSORÓ - RN

2023

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

T474c Torres Alves, Roberta Rafaela.  
Controle preditivo de modelo robusto chaveado  
via LMI para controle de tensão do conversor  
Boost e sistemas LPV / Roberta Rafaela Torres  
Alves. - 2023.  
81 f. : il.

Orientador: Marcus Vinícius Silvério Costa.  
Coorientador: Francisco Everton Uchôa Reis.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal  
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em  
--Selecione um Curso ou Programa--, 2023.

1. Controle Preditivo Robusto Baseado em  
Modelo. 2. Desigualdades Matriciais Lineares. 3.  
Sistemas Chaveados. 4. LPV. 5. Conversor Boost.  
I. Silvério Costa, Marcus Vinícius, orient. II.  
Uchôa Reis, Francisco Everton, co-orient. III.  
Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade  
com AACR2 e os dados fornecidos pelo autor(a).  
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência  
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva  
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

ROBERTA RAFAELA TORRES ALVES

**CONTROLE PREDITIVO DE MODELO ROBUSTO CHAVEADO VIA LMI PARA  
CONTROLE DE TENSÃO DO CONVERSOR *BOOST* E SISTEMAS LPV**

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada ao programa de Mestrado em Engenharia Elétrica da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-graduação da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistemas de Controle e Automação.

Defendida em: 28 de Julho de 2023

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Marcus Vinicius Silvério Costa (Orientador)  
Universidade Federal Rural do Semi-árido (UFERSA)

---

Prof. Dr. Francisco Everton Uchôa Reis (Coorientador)  
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

---

Prof. Dr. Victor de Paula Brandão Aguiar  
Universidade Federal Rural do Semi-árido (UFERSA)

---

Prof. Dr. Adriano Aron Freiras de Moura  
Universidade Federal Rural do Semi-árido (UFERSA)

---

Prof. Dr. Fabrício Gonzalez Nogueira  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

*Dedico este trabalho a minha filha Ana Cecília que com seu amor me sustentou até aqui nesse momento.*

E assim, viva como quem soube que vai morrer, e morra como quem um dia soube viver (...)

(Rosa de Saron)

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, expresso minha gratidão a todos aqueles que foram motivo de encorajamento e determinação perante essa minha trajetória acadêmica. Agradeço a minha mãe, Deusinha Poetisa, e a meu pai, Roberto Alves, por me fornecerem força, o incentivo e suporte contínuo para seguir em frente nesta caminhada. Também sou grata à minha filha, Ana Cecília, e ao meu marido, Carlos Vinícius, por sempre me impulsionarem a agarrar as oportunidades e por todo o apoio e o amor que me foi dado durante esse percurso e para todo o sempre.

Também gostaria de expressar aqui meus sinceros agradecimentos aos professores Dr. Marcus Vinícius Silvério Costa e Dr. Francisco Everton Uchôa Reis, meus orientadores, por estarem sempre presentes, serem pacientes e dedicados e compreensíveis com o meu tempo. Agradeço ainda por compartilharem seu vasto conhecimento científico nessa área do ensino e da pesquisa e por me inserirem nesse mundo. Também quero agradecer à banca avaliadora por sua presença e disponibilidade em avaliar e oferecer sugestões para o aprimoramento deste trabalho.

Por fim, mas não menos importante, expresso minha gratidão aos amigos que me apoiaram, ajudaram e contribuíram significativamente para o meu crescimento como estudante e para as minhas conquistas. Gostaria de agradecer a todos em nome de Luís de Carvalho, que esteve ao meu lado até o fim, me ensinou, me orientou, eu não teria chegado tão longe sem você. Também agradeço ao professor Dr. Elenilson Vargas Fontes por sua colaboração e apoio. Além disso, agradeço à Universidade Federal Rural do Semiárido pela oportunidade de formação e desenvolvimento acadêmico, assim como à CAPES pelo suporte financeiro e institucional que tornaram isso possível.

## RESUMO

Este estudo apresenta uma abordagem de controle preditivo robusto comutado para resolver problemas lineares com variação no tempo. Utilizando o teorema de estabilidade de Lyapunov-Metzler, a pesquisa também aplica o controle preditivo robusto baseado em modelo chaveado ao conversor *boost* com célula de comutação de três estados, considerando o modelo equivalente do *Boost*. A metodologia proposta busca estabilizar o índice de desempenho quadrático ao longo de um horizonte de predição infinito, utilizando desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMI). A estabilidade em malha-fechada é analisada considerando elipsoides de fronteira, e a técnica é avaliada por meio de testes comparativos utilizando dois exemplos de referência. O foco está na resposta no tempo, nos índices de desempenho e no controle da tensão de saída do conversor *Boost*. Os resultados em ambas as aplicações demonstram a superioridade da abordagem proposta em relação aos métodos de referência, tanto em termos de tempo de resposta quanto de índices de desempenho. Além disso, a estabilização do conversor é mantida mesmo após variação dos parâmetros de projeto com base na comutação, como confirmado pelas elipsoides de estabilidade. Conclui-se que o teorema de controle preditivo proposto garante a estabilização em malha fechada e supera as técnicas de referência em termos de tempo de resposta e índices de desempenho. O estudo destaca a aplicabilidade da técnica de controle proposta em conversores e em sistemas LPV, considerando o princípio do modelo comutado. Como trabalhos futuros, sugere-se a exploração de abordagens de retroalimentação de saída e aplicações do estudo proposto em plantas experimentais.

**Palavras-chave:** Algoritmos Online e Offline. Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo. Desigualdade de Lyapunov. Desigualdades Matriciais Lineares. Sistemas Chaveados. Realimentação de estados. LPV. Conversor Boost

## ABSTRACT

This study presents a switched robust predictive control approach for linear time-varying problems, utilizing the Lyapunov-Metzler stability theorem. The research also applies switched model-based robust predictive control to the Boost converter with a three-state switching cell, considering the boost converter equivalent model. The proposed methodology aims to stabilize the quadratic performance index over an infinite prediction horizon using linear matrix inequalities - LMI. Closed-loop stability is analyzed through boundary ellipsoids. The technique is evaluated through comparative tests with two reference examples, focusing on the time response, performance indices, and output voltage control of the Boost converter. The results in both applications demonstrate the superiority of the proposed approach compared to reference methods in terms of response time, performance indices, and the stability of the converter even after parameter variations based on switching. The boundary ellipsoids confirm the closed-loop stabilization of the switched model. It is concluded that the proposed predictive control theorem guarantees closed-loop stabilization and outperforms reference techniques in terms of response time and performance indices. The study highlights the applicability of the proposed control technique in converters and LPV systems, considering the principle of the switched model. Future work suggests exploring output feedback approaches and applying the proposed study to experimental plants.

**Keywords:** Online and Offline Algorithms. Robust Model Predictive Control. Lyapunov inequality. Linear Matrix Inequalities. Switched Systems. State Feedback. LPV. Boost Converter.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Conjunto solução relaxado (CARVALHO <i>et al.</i> , 2020). . . . .	23
Figura 2 – Sistema Sujeito a Comutação e Incertezas Fracionárias (CARVALHO <i>et al.</i> , 2020). 37	
Figura 3 – Conversor Boost com célula de comutação de três estados. . . . .	40
Figura 4 – Diagrama de blocos da ação de controle proposta. . . . .	56
Figura 5 – a) Tensão de entrada ( $V_G$ ) b) Potência de saída ( $P_o$ ). . . . .	58
Figura 6 – Sequência de Chaveamento. . . . .	59
Figura 7 – Tensão de saída ( $V_o$ ). . . . .	59
Figura 8 – Resposta dos Estados . . . . .	60
Figura 9 – Sinal de Controle. . . . .	61
Figura 10 – Elipsoides de Estabilidade. . . . .	62
Figura 11 – Sistema CSM, adaptado de Esfahani e Pieper (2019). . . . .	62
Figura 12 – Estados do Sistema. . . . .	64
Figura 13 – Variável LPV. . . . .	65
Figura 14 – Curva da taxa de decaimento. . . . .	65
Figura 15 – Sinal de Controle. . . . .	66
Figura 16 – Regra de Comutação. . . . .	66
Figura 17 – Elipsoides de Estabilidade em 2D. . . . .	67
Figura 18 – Elipsoides de estabilidade em 3D. . . . .	67
Figura 19 – Resposta Estado-Tempo. . . . .	69
Figura 20 – Variável LPV. . . . .	69
Figura 21 – Convergência da Função Objetivo. . . . .	70
Figura 22 – Sinal de Controle. . . . .	70
Figura 23 – Regra de Chaveamento. . . . .	71
Figura 24 – Elipsoides de Estabilidade 2D. . . . .	72
Figura 25 – Elipsoides de Estabilidade 3D. . . . .	72

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do Conversor Boost. . . . .	40
Tabela 2 – Exemplo I: Índices de Desempenho. . . . .	68
Tabela 3 – Exemplo II: Índices de Desempenho . . . . .	73

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	13
<b>1.1</b>	<b>Proposta da Pesquisa</b>	16
1.1.1	Proposta do SR-MPC aplicado a conversores do tipo Boost	16
1.1.2	Proposta do SR-MPC em sistemas LPV	16
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b>	17
<b>1.3</b>	<b>Contribuições</b>	17
<b>1.4</b>	<b>Resumo dos Capítulos</b>	18
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	19
<b>2.1</b>	<b>Introdução as LMI's</b>	19
2.1.1	LMIs e a Estabilidade de Lyapunov	21
2.1.2	Introdução as LMIs Relaxadas	22
<b>2.2</b>	<b>Introdução aos Sistemas Lineares Comutados</b>	24
2.2.1	Controle Preditivo Baseado em Modelo	26
2.2.1.1	Modelo de Incertezas Politópicas e Fracionárias	26
<b>2.3</b>	<b>RMPC - LMI e a Realimentação de Estados</b>	27
<b>2.4</b>	<b>Introdução aos Sistemas LPV-Afim</b>	31
<b>2.5</b>	<b>Controle Preditivo Baseado em Modelo Comutado</b>	32
2.5.1	SR-MPC via Função de Lyapunov Múltipla	33
2.5.2	SR-MPC via Função de Lyapunov–Metzler	36
<b>2.6</b>	<b>SR-MPC-LPV - Algoritmos <i>online</i> e <i>offline</i></b>	38
<b>3</b>	<b>ESTRATÉGIA DE CONTROLE PROPOSTA</b>	40
<b>3.1</b>	<b>Modelagem do Conversor</b>	40
<b>3.2</b>	<b>Abordagem Linear Chaveada e Politópica</b>	41
3.2.1	Controle Preditivo baseado em Modelo Comutado	42
<b>3.3</b>	<b>Abordagem LPV Chaveada</b>	45
<b>3.4</b>	<b>Desigualdade de Lyapunov–Metzler</b>	51
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DOS RESULTADOS</b>	55
<b>4.1</b>	<b>SR-MPC via LMI aplicado ao Conversor <i>Boost</i> CCTE</b>	55
4.1.1	Servomecanismo de Ação Integral	56
4.1.2	Análise dos Resultados do SR - MPC via LMIs Aplicado ao conversor <i>Boost</i>	57

<b>4.2</b>	<b>Análise de resultados do SR-MPC Aplicado a sistemas LPV . . . . .</b>	<b>61</b>
4.2.1	Exemplo I . . . . .	61
4.2.2	Exemplo II . . . . .	68
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>74</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>76</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, tem havido um crescente interesse no desenvolvimento de sistemas de controle mais sofisticados e robustos, tanto na indústria quanto na academia (SARWAR *et al.*, 2019). Nesse contexto, o uso do Controle Preditivo de Modelo Robusto (do inglês, *Robust Model Predictive Control* - RMPC) com restrições usando Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) tem se mostrado uma estratégia viável para problemas de estabilização de plantas, como demonstrado em estudos anteriores proposto por Kothare *et al.* (1996) e amplamente estudado por Costa *et al.* (2017), Rego e Costa (2020), Rego e Costa (2023) e Carvalho *et al.* (2023).

Assim, o RMPC com restrições tem sido amplamente estudado e aplicado, já que oferece diversas vantagens ao lidar com sistemas multivariáveis sujeitos a limitações de modelo, permitindo uma abordagem robusta para lidar com incertezas, conforme evidenciado nos trabalhos de Peccin *et al.* (2019), Cao *et al.* (2021), Fard e Sadeghzadeh (2021), Kaitao *et al.* (2022). Em certos casos, existem situações em que problemas de modelo não podem ser resolvidos com os métodos clássicos e exigem abordagens alternativas, como no caso de sistemas que utilizam abordagens chaveadas. Nesse sentido, métodos que garantem estabilidade por meio da comutação têm se mostrado soluções viáveis, o que justifica o número crescente de estudos nessa área, como indicado por pesquisas recentes (DEY *et al.*, 2021; KAIRUZ *et al.*, 2021; NAJSON, 2021; EGIDIO *et al.*, 2022).

Dessa forma, vários estudos têm contribuído para o desenvolvimento de técnicas de controle preditivo aplicado a sistemas lineares comutados. Em Hall e Bridgeman (2021), é conduzida uma investigação abrangente que explora a aplicação do controle preditivo em cenários envolvendo comutação exógena. Por outro lado, outra abordagem é apresentada em Marcolino *et al.* (2020), trazendo um esquema de controle preditivo comutado utilizando modelos linearizados que levam em consideração incertezas estruturadas em diversas leis de controle.

Há também os estudos desenvolvidos por Monasterios e Trodden (2021), Liu *et al.* (2020) e Kiani *et al.* (2020). No trabalho de Monasterios e Trodden (2021), é discutida a exequibilidade da aplicação do controle preditivo descentralizado em sistemas lineares com comutação. O estudo de Liu *et al.* (2020) apresenta uma técnica de comutação aplicada a motores síncronos com ímã permanente, com o objetivo de fixar uma frequência de chaveamento e garantir a dinâmica do controle preditivo. Já em Kiani *et al.* (2020), é sugerida a aplicação do RMPC Chaveado para geradores utilizados na produção de energia eólica.

Além disso, o trabalho de Esfahani e Pieper (2019) introduz uma estratégia de controle RMPC para uma coleção de sistemas discretos por meio da transformação linear fracionária, considerando perturbações limitadas pela norma e modelos de incerteza. Adicionalmente, Carvalho *et al.* (2023) propõe um design de Controle Preditivo de Modelo Robusto Comutado (SR-MPC) que incorpora restrições relaxadas e estabilização por meio de elipsoides de fronteira. Esses estudos contribuem coletivamente para o avanço e aplicação de metodologias de controle preditivo robusto em sistemas lineares comutados.

Outrossim, a metodologia introduzida por Benallouch *et al.* (2014) utiliza LMIs para abordar um problema de controle preditivo de modelo comutado. No trabalho de Nabais e Lemos (2020), é desenvolvido um esquema de controle preditivo de modelo comutado adaptativo que incorpora múltiplos sistemas lineares e emprega uma lei de controle global governada por uma regra comutada. Adicionalmente, Khan *et al.* (2020) aplica uma estratégia de controle comutado para projetar um inovador inversor multinível para aplicações fotovoltaicas.

Estudos envolvendo a aplicação de controles RMPC-LMI em conversores de potência, têm sido alvo de investigação, conforme Costa *et al.* (2016), Costa *et al.* (2017) e Rego *et al.* (2018). Além disso, essas técnicas de controle demonstram eficiência no controle de tensão de conversores do tipo *boost*, como pode ser visto em Rego *et al.* (2019), Rego e Costa (2019), Moreira *et al.* (2019) e Araújo *et al.* (2019). O principal benefício da modelagem clássica do conversor *boost* é a capacidade de manter a topologia original do conversor *boost* DC-DC e AC-DC por meio do modelo equivalente *boost* (MIDDLEBROOK; CUK, 1976). No entanto, a existência de fase não-mínima, associada a variações de parâmetros como carga e tensão de entrada, dificulta a estabilização em malha-fechada desses conversores considerando apenas um único ponto de operação para o projeto (BASCOPE; BARBI, 2000; COSTA *et al.*, 2017).

Soluções para estabilização robusta de conversores são apresentadas em Moreira *et al.* (2019), Moreira *et al.* (2021), o qual envolve o MPC-LMI Fuzzy e o Controle Preditivo Generalizado - (*Generalized Predictive Control - GPC*). O RMPC com restrições apresenta uma série de facilidades quando aplicado a sistemas multivariáveis com limitações no modelo, podendo efetuar um processamento robusto de incertezas, visto em Peccin *et al.* (2019), Cao *et al.* (2021), Fard e Sadeghzadeh (2021) e Kaitao *et al.* (2022).

Resalta-se também o controle preditivo cuja topologia é dada por realimentação de saída, como visto em Kim e Lee (2017), que tem como proposta um método de MPC quasi-min-max para sistemas de variação de parâmetros lineares (LPV) estando sujeitos a restrições. Nesse

ponto, entende-se que o sistema LPV pode ser modelado como um sistema politópico, no qual é eficiente para modelagem de incerteza de variação linear no tempo (LTV) e também em sistemas lineares invariantes no tempo (LTI).

O artigo de Ku e Chen (2020) apresenta o desenvolvimento de um controlador baseado em observador que assegura a estabilidade assintótica dos sistemas LPV com ruído multiplicativo no sentido do quadrado médio. O artigo de Zhao e Nagamune (2017) aborda o problema de projetar controladores *output-feedback* para sistemas LPV com medição inexata de parâmetros de programação e comutação do sistema LPV.

As abordagens LPV politópicas são frequentemente empregadas em sistemas inteligentes de controle automotivo devido à sua capacidade de lidar com a não linearidades complexas (LI *et al.*, 2021). No estudo conduzido por Rego e Costa (2023), um esquema de RMPC é desenvolvido para sistemas LPV utilizando um algoritmo quasi-minimização-máxima com LMIs relaxadas. A abordagem proposta envolve um observador de estado *offline* em conjunto com um procedimento de controle de estado de *feedback* MPC *online*.

No entanto, controladores conservadores RMPC-LPV frequentemente encontram restrições de inviabilidade ao lidar com grandes incertezas politópicas usando Inequações Matriciais Lineares convencionais (PARK *et al.*, 2011; SU; TAN, 2012). Para enfrentar esse problema, Wada e Saeki (2016) propõe um método de compensação anti-saturação para estabilizar modelos de malha fechada e melhorar o tempo de resposta transitório.

Nesse contexto, o princípio de funcionamento de conversores segue uma metodologia de chaveamento para a conservação de energia (BASCOPE; BARBI, 2000). Porém, tal princípio apresenta um comportamento não linear, e a linearização segue o princípio do espaço de estados médio ou chave PWM como citado por Costa *et al.* (2017). Uma abordagem de controle capaz de resolver problemas de estabilização seria o controle por comutação, cujos estudos desenvolvidos nessa área estão em constante evolução, como pode ser visto nos trabalhos de Dey *et al.* (2021), Kairuz *et al.* (2021) e Najson (2021).

A relevância das pesquisas abrangendo SR-MPC-LMI, tanto *online* quanto *offline*, tem sido refletida no aumento do número de artigos científicos em todas as áreas da engenharia. Tais artigos têm sido publicados no decorrer dos anos. Ademais, os controladores SR-MPC-LPV geralmente exigem um esforço computacional significativo para as plantas online e modelos de malha fechada, o que, por sua vez, pode restringir as aplicações do SR-MPC-LPV em certos cenários (COSTA *et al.*, 2017; REGO; COSTA, 2020). Dessa maneira, a aplicação da técnica

de controle preditivo robusto chaveado usando procedimentos LMIs em conversores tipo boost, bem como o SR-MPC-LPV, merece ser investigada. Além do mais, essa abordagem não é vista nos trabalhos anteriormente citados.

Portanto, essa dissertação propõe um controlador preditivo de modelo robusto chaveado (SR-MPC) aplicado a um conversor do tipo Boost. Essa proposta é uma derivação da estratégia de controle proposta por Kothare *et al.* (1996) e segue a metodologia de comutação de Benalouch *et al.* (2014). O controlador é modelado via desigualdades matriciais lineares (Linear Matrix Inequalities - LMIs) com o objetivo de minimizar o limite superior do índice de desempenho quadrático para um horizonte de predição infinito (Infinite Horizon - IH). Além disso, também propõe uma extensão da abordagem de Controle Preditivo de Modelo Robusto Comutado (SR-MPC) conforme abordado por Carvalho *et al.* (2023), estendido para aplicação a sistemas LPV. A metodologia proposta é sustentada por aspectos teóricos e computacionais, utiliza benchmarks de estudos anteriores (BENALLOUCH *et al.*, 2014; ESFAHANI; PIEPER, 2019; WADA *et al.*, 2006) e incorpora a abordagem de comutação.

## 1.1 Proposta da Pesquisa

### 1.1.1 Proposta do SR-MPC aplicado a conversores do tipo Boost

Este estudo desenvolvido propõe o uso do Controle Preditivo de Modelo Robusto Comutado (do inglês, *Switched Robust Model Predictive Control* - SR-MPC) para o controle da tensão de saída do conversor *Boost* com célula de comutação em três estados (CCTE). A abordagem adotada é baseada no trabalho de Kothare *et al.* (1996) e segue o procedimento de controle preditivo de modelo comutado descrito por Benalouch *et al.* (2014) utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMI). O objetivo é minimizar o índice de desempenho quadrático superior considerando um horizonte de previsão infinito para controlar a tensão de saída do conversor.

### 1.1.2 Proposta do SR-MPC em sistemas LPV

Devido as dificuldades encontradas no desenvolvimento dos controladores RMPC-LPV via LMIs e as suas restrições associadas, esta pesquisa apresenta uma extensão da estratégia *Switched Robust Model Predictive Control* (SR-MPC) proposta por Carvalho *et al.* (2023) estendida para sistemas com Variação de Parâmetros Lineares (do inglês, *Linear Parameter-Varying*

- LPV). A metodologia adotado é fundamentada em aspectos teóricos e computacionais e os resultados são apresentados por meio de uma análise comparativa com *benchmarks* dos trabalhos de Benallouch *et al.* (2014), Esfahani e Pieper (2019), Wada *et al.* (2006). Além disso, a abordagem chaveada é incorporada ao método utilizado.

## 1.2 Objetivos

A partir das pesquisas realizadas por Kothare *et al.* (1996), Geromel e Colaneri (2006a), Benallouch *et al.* (2014), Wada *et al.* (2006), Esfahani e Pieper (2019) e Carvalho *et al.* (2023) este trabalho tem por objetivo estudar e propor à síntese de controladores preditivos robustos baseados em modelo para sistemas lineares discretos em malha-fechada sujeitos a comutação aplicados a topologia do conversor *boost* Célula de Comutação de Três Estados (CCTE) bem como a extensão do controlador SR-MPC para sistemas LPV nos *designs online* e *offline* com comprovação teórico-computacional através de uma análise comparativa.

## 1.3 Contribuições

O desenvolvimento dessa pesquisa no decorrer do tempo gerou contribuições de grande relevância e listadas a seguir para uma maior clareza.

- Formulou-se a síntese de um projeto de controle de um RMPC-LMI comutado para o conversor *boost* utilizando um modelo de espaço de estados médio;
- Realizou-se uma análise de estabilidade em malha fechada chaveada levando em consideração uma abordagem de incerteza politópica comutada, submetendo o algoritmo a testes em condições mais complexas do que o estudo de Benallouch *et al.* (2014);
- Os teoremas apresentados por Carvalho *et al.* (2023) são generalizados para atender os sistemas LPV comutados, especificamente direcionados para a realimentação de estado;
- As abordagens propostas para a estabilização de sistemas em malha-fechada são validadas através de uma análise comparativa de resultados;
- A metodologia proposta aborda e supera efetivamente as limitações observadas tanto no SR-MPC por Benallouch *et al.* (2014), quanto nas metodologias RMPC-LPV propostas por Wada *et al.* (2006) e Esfahani e Pieper (2019), considerando os *benchmarks*.

## 1.4 Resumo dos Capítulos

Diante do exposto, esta dissertação encontra-se organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** Nesse capítulo foi introduzido o tema a ser abordado através de citações de trabalhos que foram elaborados por diferentes pesquisadores distribuídos pelo mundo no passar dos anos, tendo como intuito de fundamentar, estruturar e salientar a importância da linha de pesquisa no meio acadêmico, nessa seção também foram apresentados os objetivos, as propostas e as contribuições desse estudo.
- **Capítulo 2:** Durante essa importante seção é apresentado os conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento da referida pesquisa, principalmente aos conceitos e definições matemáticas de desigualdades matriciais lineares, formulação e relaxação destas, estabilidade de Lyapunov, sistemas comutados, sistemas LPV afim e a teoria do SR-MPC *online/offline* dentre outros.
- **Capítulo 3:** Esta seção é a responsável por apresentar a proposta da pesquisa, contendo a estratégia de controle, ou seja, a síntese do controlador preditivo robusto baseado em modelo para sistemas lineares discretos sujeitos a comutação aplicados ao conversor *Boost* bem como, a extensão para sistemas LPV.
- **Capítulo 4:** O intuito desse capítulo é discutir os resultados das simulações numéricas implementadas para averiguar a eficiência das técnicas propostas neste trabalho, bem como trazer a análise comparativa dos resultados obtidos com os do *benchmark*.
- **Capítulo 5:** Nesse trecho, atribui-se as inferências finais a respeito dos resultados do estudo assim como as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, serão abordados conceitos fundamentais e definições matemáticas relacionadas a desigualdades matriciais lineares, controle chaveado e sistemas com Variação de Parâmetros Lineares (LPV), bem como a teoria do SR-MPC *online/offline* serão abordados. Também serão apresentados os principais recursos matemáticos, sistemas computacionais e solucionadores necessários para resolver essas LMIs. Ao longo da exposição, serão descritas algumas aplicações práticas desses conceitos.

### 2.1 Introdução as LMI's

As Desigualdades Matriciais Lineares (LMI's) desempenham um papel fundamental no campo do controle, sendo utilizadas para a identificação, síntese e controle de sistemas. A utilização de LMI para modelagem é altamente relevante, pois permite a representação de restrições e especificações de projeto de forma eficaz Gahinet *et al.* (1994). Além disso, é importante destacar que as LMIs oferecem uma abordagem flexível e poderosa para lidar com problemas de controle, proporcionando uma base sólida para o desenvolvimento de estratégias de controle.

Além disso, a solução de problemas formulados por LMIs pode ser efetivamente realizada por meio de algoritmos amplamente descritos na literatura especializada. Adicionalmente, de acordo com Costa (2012), é comum que diversos problemas apresentem múltiplas restrições e que essas podem ser expressas de forma matricial, demonstrando a viabilidade e praticidade da utilização de LMI para representar tais restrições. Conforme destacado em estudos anteriores, muitas das abordagens tradicionais da teoria de controle foram reformuladas na forma de LMIs, devido aos seus resultados serem efetivos (AGUIRRE, 2007).

Para compreender as aplicações das LMIs, é importante ter em mente sua definição matemática, que diz que as Desigualdades Matriciais Lineares, consistem em combinações lineares de matrizes simétricas com autovalores não negativos. Suas soluções numéricas podem ser obtidas através da minimização de uma função objetivo específica, que busca encontrar os valores das variáveis matriciais que satisfazem as restrições impostas pelas LMIs (BOYD *et al.*, 1994).

De maneira ilustrativa, admitindo que haja um problema de estabilização de um sistema dinâmico sujeito a restrições. Supondo que se pretenda encontrar um controlador que garanta a estabilidade do sistema, ao mesmo tempo em que respeite certas restrições de desempenho, como tempo de resposta e atenuação de ruídos, por exemplo. Esse problema pode ser for-

mulado como um problema de otimização, em que a função objetivo é minimizar uma medida de desempenho, como o erro quadrático entre a saída desejada e a saída real do sistema (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

Assim, ao utilizar a abordagem de LMI, pode-se expressar as restrições impostas ao sistema como desigualdades matriciais, representando limitações nas matrizes de ganho do controlador. Através da minimização da função objetivo, são buscados os valores das variáveis matriciais que satisfazem essas restrições e que, ao mesmo tempo, otimizem o desempenho do sistema. Com isso, a minimização da função objetivo está diretamente relacionada às soluções numéricas das LMIs, pois busca-se encontrar os valores das variáveis matriciais que atendam às restrições e proporcionem o melhor desempenho possível para o sistema controlado (BOYD *et al.*, 1994). Dessa maneira, de acordo com a definição matricial apresentadas por Boyd *et al.* (1994), na qual diz que para encontrar um solução matricial, é necessário minimizar uma função objetivo específica. Logo,

$$F(x) = x_1F_1 + x_2F_2 + x_3F_3 + \dots + x_mF_m \geq -F_0 \quad (2.1)$$

Reestruturando essa equação, têm-se:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_iF_i \geq 0 \quad (2.2)$$

Dessa forma, pode-se afirmar que as Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), são representações de restrições convexas na forma afim. Isso quer dizer que, existe um determinando conjunto convexo de soluções que são factíveis e dado por  $\{x \in \mathbb{R}^m | F(x) \geq 0\}$ . Por meio desse conjunto métodos computacionais conseguem resolver problemas via LMIs, assim como descrito por Boyd *et al.* (1994). Portanto, segundo Costa (2012), quando fala-se sobre ser ou não ser factível, é importante inserir o conceito de factibilidade, onde diz que: o conjunto solução de um determinado entrave de controle, sendo esse formulado via LMIs, é factível, se todas as restrições que foram determinadas pelo modelo estiverem atendidas.

Conforme Aguirre (2007), ao citar métodos computacionais, uma vasta lista de algoritmos e *solvers* se apresentam como métodos resolutivos para problemas de Programação semidefinida (em inglês, *Semi-Definite Programming - SDP*), bem como, para os problemas de otimização convexa. Dentre os programas e *solvers*, destacam-se o LMILAB, LMITOOL, LMISol, SDPT3

e SeDuMi. Todos os que foram mencionados são compatíveis com os *softwares* MATLAB e GNU/OCTAVE, e também com outras linguagens como o Python, C e C++.

Portanto, para o desenvolvimento desse trabalho, foram empregados o SeDuMi e o YALMIP, dois pacotes que oferecem uma forma ágil e eficiente de desenvolver soluções. O YALMIP facilita a representação de problemas de programação convexa de maneira mais intuitiva, nesse caso foi utilizado o MATLAB, que realizou automaticamente a interface com o SeDuMi (LÖFBERG, 2012; LÖFBERG, 2004).

### 2.1.1 LMIs e a Estabilidade de Lyapunov

Dentro da teoria das Desigualdades Matriciais Lineares, é crucial destacar o conceito de Estabilidade de Lyapunov. Essa técnica se resume em encontrar uma função de estado definida positiva, nomeada como equação de Lyapunov, cuja a derivada em função do tempo seja definida negativa. Isso ocorre, porque essa propriedade é fundamental para garantir a estabilidade de sistemas dinâmicos (KHALIL, 2002).

Conforme mencionado por Aguirre (2007), considerando um sistema linear autônomo representado pela equação (2.3). Nessa equação,  $x \in \mathbb{R}^n$  corresponde aos estados do sistema,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  denota a matriz de estados, e o operador  $\Delta[\cdot]$  pode indicar a expressão  $x(t)$  para o modelo contínuo, e  $x(k+1)$  para o modelo discreto. Dessa forma,

$$\Delta[\dot{x}] = A \Delta[x] \quad (2.3)$$

Na (2.3), verifica-se que o sistema está em equilíbrio se apresentar  $\Delta[x] \equiv 0$ . Isso significa que não existiram variações dos estados como mencionado em Costa *et al.* (2017), Aguirre (2007). Mediante esses termos, é possível a formulação de uma função (quadrática positiva) que consiga satisfazer o critério de estabilidade de Lyapunov. Com base nisso, a definição do critério de Lyapunov é dada por:

**Definição 1.** *Critério de Estabilidade de Lyapunov:*

$$V(\Delta[x]) := \Delta[x]^T Q \Delta[x] > 0 \quad (2.4)$$

Portanto, a matriz de estabilidade é dada por  $Q = Q^T \geq 0$ , onde,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Assim, pode-se afirmar que o sistema é globalmente e assintoticamente estável quando,  $\dot{V}(\Delta[x]) < 0$ .

### 2.1.2 Introdução as LMIs Relaxadas

Conforme Sopasakis e Patrinos (2021), o conservadorismo matemático comum em projetos de controle, refere-se a uma certa tendência de utilizar abordagens conservadoras ao formular restrições e critérios de projeto. Isso implica que as soluções obtidas podem ser mais restritivas do que o necessário, levando a um desempenho subótimo do sistema controlado (SOPASAKIS; PATRINOS, 2021).

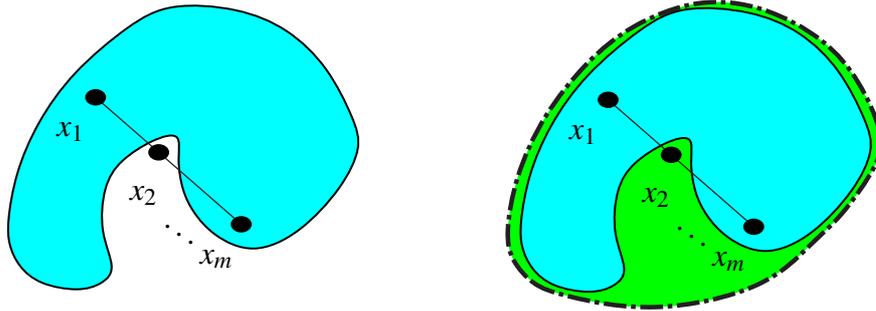
Em Costa (2017), é apontado que esse conservadorismo é especialmente observado em projetos que utilizam Desigualdades Matriciais Lineares como ferramenta de análise e síntese de controle. Contudo, em Rego (2019), é apontado como as LMIs são poderosas para representar restrições e especificações de projeto de forma matricial.

É importante destacar, que o conservadorismo matemático em projetos de controle não é necessariamente indesejado em todos os casos. Segundo Khalil (2002), em algumas aplicações críticas, como controle de sistemas aeroespaciais ou processos industriais que apresentem alta complexidade, é preferível adotar abordagens mais conservadoras com o intuito de garantir a segurança e a confiabilidade do sistema.

Esses sistemas requerem estratégias robustas e precisas para enfrentar restrições e modelos de incertezas específicos. No entanto, em casos de mau condicionamento do sistema, as LMIs podem não atender às condições de factibilidade do problema ou violar as restrições durante a otimização. Isso pode levar a soluções não factíveis, ou seja, fora do espaço convexo (REGO, 2019; COSTA, 2017; CUZZOLA *et al.*, 2002). Entretanto, quando a área de busca do algoritmo é aumentada, é possível encontrar uma solução factível dentro desse espaço estendido.

No estudo realizado por Cuzzola *et al.* (2002), foi proposta uma técnica de relaxamento das restrições LMIs, visando torná-las mais flexíveis em comparação ao modelo tradicional. Essa estratégia tem como objetivo resolver o problema de infactibilidade causado pelo conservadorismo excessivo no controle de sistemas complexos. Isso resulta em um aumento da região convexa e, conseqüentemente, da área de factibilidade do modelo, como ilustrado na 13 (REGO; COSTA, 2020; COSTA *et al.*, 2017).

Através da Figura 13, é possível visualizar o processo de relaxamento de um problema de otimização que envolve LMIs. No conjunto A, é observado que alguns elementos da solução estão fora da região convexa, indicada em azul, resultando em uma solução infactível. Em contrapartida, na parte B, a solução é mostrada novamente, porém é visto a expansão da região



(a) - Antes da relaxação: Não factível      (b) - Após a relaxação: Factível  
 Figura 1 – Conjunto solução relaxado (CARVALHO *et al.*, 2020).

convexa feita a partir da metodologia de relaxamento adotada, representada em verde. Isso permite que todos os elementos da solução estejam dentro da região convexa, tornando o modelo factível, assim como descrito por Costa (2012).

Com o processo bem definido e ilustrado, segue-se para uma explicação em termos matemáticos. Isto posto, a abordagem de relaxamento proposta por Cuzzola *et al.* (2002), consiste em admitir a existência de uma matriz  $G$ , com as seguintes propriedades: ela é invertível, não simétrica e semidefinida positiva, em que  $G^t \geq 0$ , com dimensões compatíveis com a matriz de estabilidade,  $Q = Q^T \geq 0$ , do sistema a ser relaxado. Essa relação pode ser expressa pela inequação (2.5), descrita por:

$$G > S \implies G - S > 0 \quad (2.5)$$

Em que,  $Q = S^{-1} > 0$  e  $S = S^T \geq 0$ . Em seguida, é necessário multiplicar a matriz de estabilidade que se encontra à esquerda por  $(S - G)$  e a que se encontra à direita por  $(S - G)^T$ , isso feito, resultará na (2.6) que por inferência é possível determinar a (2.8).

$$(S - G)S^{-1}(S - G)^T > 0, \quad (2.6)$$

$$S - G^T - G + GS^{-1}G^T > 0, \quad (2.7)$$

$$GS^{-1}G^T > G + G^T - S \quad (2.8)$$

Além disso, na (2.8), é apresentada a condição de relaxamento, a qual garante a linearidade e convergência do sistema que passou pelo processo de relaxamento. Por conseguinte,

podemos considerar a condição de estabilidade de Lyapunov para um sistema discreto com realimentação de estados, que é expressa pela desigualdade indicada em (2.9).

$$\bar{A}^T Q \bar{A} - Q < 0 \quad (2.9)$$

Considerando que  $Q = S^{-1} \geq 0$  pode-se reescrever a desigualdade (2.9) como a equação (2.10).

$$\bar{A}^T S^{-1} \bar{A} - S^{-1} < 0 \quad (2.10)$$

Ao reorganizar a equação (2.10) e multiplicá-la à esquerda por  $G^T$  e à direita por  $G$ , adquire-se como resultado a expressão (2.11).

$$G^T S^{-1} G - G^T \bar{A}^T S^{-1} \bar{A} G > 0 \quad (2.11)$$

Ao aplicar o complemento de Schur na equação dada por (2.11) obtêm-se a (2.12).

$$\begin{bmatrix} G^T S^{-1} G & * \\ \bar{A} G & S \end{bmatrix} > 0 \quad (2.12)$$

Ao substituir a condição de relaxação expressa em (2.8) e admitir o sistema realimentado  $\bar{A} = A - BK$  para  $K = YG^{-1}$ , obtêm-se a condição de estabilidade de Lyapunov relaxada em tempo discreto. Essa condição é descrita pela LMI vista na relação exposta em (2.13).

$$\begin{bmatrix} G + G^T - S & * \\ AG + BY & S \end{bmatrix} > 0 \quad (2.13)$$

## 2.2 Introdução aos Sistemas Lineares Comutados

Nos últimos anos, tem havido um aumento significativo de pesquisas envolvendo sistemas híbridos. Esses sistemas têm sido extensivamente estudados em diversas áreas, como biologia, eletrônica e processos químicos, devido à diversidade de comportamentos que eles apresentam. Para modelar esses sistemas, diferentes formalismos têm sido adotados, incluindo sistemas Mistos Lógico-Dinâmicos (do inglês, *Mixed Logical Dynamica* - MLD), e os sistemas Afins

com modulação (do inglês, *Piecewise Affine* - PWA) e, em destaque, os sistemas comutados (LIBERZON, 2003; CUZZOLA *et al.*, 2002).

De acordo com Skafidas *et al.* (1999), a estratégia de controle de sistemas comutados é amplamente utilizada em problemas que possuem múltiplos modos operacionais. Isso ocorre, devido ao modo operacional que é expresso por uma equação diferencial que descreve a evolução do estado contínuo do sistema. A alternância entre esses modos acontece quando um evento específico é acionado, seja pelos eventos de estado ou pelos de entrada. Um dos desafios no controle de sistemas comutados é desenvolver leis de controle de feedback de comutação que sejam capazes de estabilizar o sistema (LIN; ANTSAKLIS, 2009). Dessa maneira, é importante aprofundar o estudo desses sistemas e explorar estratégias de controle eficazes que considerem a natureza dinâmica e a mudança de modos nesses sistemas complexos.

Nesse contexto, é amplamente aceito que a estabilidade de dois subsistemas pode ser garantida pela existência de uma combinação convexa estável dos subsistemas lineares. Essa condição necessária e suficiente é discutida em detalhes por Wicks *et al.* (1998).

No entanto, para sistemas comutados lineares com mais de dois modos, essa condição se torna suficiente assim como mostra o trabalho de Liberzon *et al.* (1999). Outra abordagem, que utiliza cálculos numéricos, foi proposta por Boyd e Vandenberghe (2004) para a estabilização robusta de sistemas comutados com incertezas politópicas. Nessa abordagem, foi projetada uma lei de comutação quadrática de estabilização e a solução foi formulada em termos de LMI's. É importante destacar que todas essas técnicas utilizaram as funções de Lyapunov quadráticas comuns para garantir a estabilidade.

Com o intuito de reduzir o conservadorismo dessas escolhas, a comunidade científica/acadêmica têm buscado outras alternativas, como as funções de Lyapunov múltiplas (do inglês, *Multiple Lyapunov Functions*- MLFs). Portanto, essas funções têm sido aplicadas em sistemas lineares, sistemas não lineares. Embora existam muitos resultados sobre a síntese de controle de sistemas comutados, com ou sem incertezas, poucos deles exploram a metodologia de Controle Preditivo de Modelo (MPC), como é visto em Müller e Allgöwer (2012). Entretanto, para sistemas comutados lineares com mais de dois modos, essa condição se torna suficiente (WICKS *et al.*, 1998).

### 2.2.1 Controle Preditivo Baseado em Modelo

Em conformidade com Camacho e Bordons (2007)Camacho (2007), é fundamental ter uma representação adequada das incertezas nos projetos de controle. Tal que, a modelagem precisa capturar a dinâmica da planta de forma precisa, caso contrário, os critérios de projeto podem não ser atendidos. Toda via, é interessante salientar que em representações mais complexas das incertezas, por conseguinte, exigirá uma maior capacidade computacional para execução dos algoritmos. Tendo em vista isso, os resultados desse tratado podem gerar problemas de computação que serão insolúveis, fato bem destacado por Camacho (1995) e Camacho (1999).

Uns dos métodos bastante utilizados na Academia, é o modelo de incertezas que apresentam a dinâmica do sistema através de um conjunto de modelos distintos, também pode ser por um modelo nominal sujeito a ruídos e perturbações.

#### 2.2.1.1 Modelo de Incertezas Politópicas e Fracionárias

**Definição 2.** *Um politopo, nada mais é do que um conjunto convexo constituído por um número finito de vértices. Todos os elementos do politopo podem ser apresentados como combinações convexas dos referidos vértices.*

A partir disso, considerando um dado conjunto politópico expresso por  $\Omega = C_o \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_5\}$ , que detém cinco vértices, de acordo com Costa (2012), qualquer ponto  $P$  que seja pertencente ao conjunto poderá ser adquirido como uma combinação convexa dos vértices que o constituem.

Dessa forma, admite-se que ao descrever um dado conjunto de modelos lineares que representam as distintas condições de operação de um projeto não linear discreto, é praticável a aproximação desse conjunto por meio de um sistema linear variante no tempo (LTV, do inglês *Linear Time Varying*). No qual, esse sistema LTV será modelado no espaço de estados de incertezas politópicas. Para uma melhor compreensão, na (2.14) está relatado a representação dessas condições de acordo com Kothare *et al.* (1996).

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k)\end{aligned}\tag{2.14}$$

Detalhando a equação (2.14), entende-se que as matrizes do sistema no espaço de estados, constituem um conjunto de incertezas politópicas que pode ser descrito pela expressão

$[A(k) \ B(k) \ C(k) \ D(k)] \in \Omega$ , em concordância com o exposto na Equação (2.15).

$$\Omega = C_o \left\{ [A_1 \ B_1 \ C_1 \ D_1], [A_2 \ B_2 \ C_2 \ D_2], \dots, [A_N \ B_N \ C_N \ D_N] \right\} \quad (2.15)$$

Já nessa Equação (2.15), o valor de  $N$  estabelecido refere-se ao número de vértices do politopo, esses podem ser determinados de acordo com os extremos das incertezas do sistema. Um ponto que vale ser destacado, é que no momento que  $N$  assume o valor de um, o sistema que foi detalhado na Equação (2.14) adquire a configuração de um sistema LTI.

Seguindo as informações fornecidas por Kothare *et al.* (1996), um dos modelos de incertezas constantemente abordado em estudos e pesquisas sobre controle robusto, é um sistema LTI que foi submetido a influência de incertezas/perturbações que são calibradas por uma realimentação. Portanto, é possível ver o equacionamento dessa relação em (2.16).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k)Pp(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \\ q(k) &= Ex(k) + Fu(k) \\ p(k) &= \Delta q(k) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Adiante, supondo que os componentes da matriz representada por  $\Delta$  apresentem-se limitados, ou seja,  $\|\Delta_i(k)\|_2 \equiv \bar{\sigma}(\Delta_i(k)) \leq 1$ , para todo  $k \geq 0$  e  $i = 1, 2, 3, \dots, r$ . Em que, a ligação entre  $p(k) \in \mathbb{R}^p$  e  $q(k) \in \mathbb{R}^q$  pode ser caracterizada conforme a Equação (2.17) a seguir (PACKARD; DOYLE, 1993; COCKBURN, 1998).

$$\sum_{j=0}^k p_i(j)^T p_i(j) \leq \sum_{j=0}^k q_i(j)^T q_i(j) \quad (2.17)$$

Por consequência, mediante a metodologia proposta por Kothare *et al.* (1996), é factível estipular o conjunto de incertezas estruturadas do modelo em estudo como trazido por (2.18).

$$\Omega \in \{[A + P\Delta E \quad B + P\Delta F], \quad \bar{\sigma}(\Delta_i(k)) \leq 1\} \quad (2.18)$$

### 2.3 RMPC - LMI e a Realimentação de Estados

O controle preditivo baseado em modelo comutado (RMPC) via LMI's refere-se ao entrave de otimização representado pela Equação (2.19). Onde o equacionamento é fundamentado

no conceito de minimização do índice de desempenho  $J_M(k)$  tal como está indicado em (2.20). Além disso, esse método de controle pode ser desenvolvido para um horizonte de predição finito (do inglês, *Receding Horizon* - RH) ou para um horizonte de predição infinito (do inglês, *Infinity Horizon* - IH) conceitos apresentado em Kothare *et al.* (1996).

$$\min_{u(k+i|k), \forall i \geq 0, k \geq 0} \max_{\Omega} J_M(k) \quad (2.19)$$

$$J_M(k) = \sum_{i=0}^M \left[ x(k+i|k)^T Q_c x(k+i|k) + u(k+i|k)^T R_c u(k+i|k) \right] \quad (2.20)$$

Ao prestar atenção, verifica-se que o horizonte de predição  $M$  foi admitido como infinito ( $M = \infty$ ). Dessa maneira, é possível assumir a Equação (2.20) como sendo  $J_{\infty}(k)$ . Analisando por partes, o termo  $x(k+i|k)$  são os estados, enquanto que a expressão  $u(k+i|k)$  representa o sinal de controle, que foram antecipados em  $(k+i)$  desde o instante  $(k)$ . Assim sendo, determina-se que a matriz  $Q_c$  é o peso que foi atribuído aos estados do sistema e a matriz  $R_c$  é o peso do controle. Ambas as matrizes são simétricas e semidefinidas positivas. De acordo com Preuss (2016) através dessa opção é possibilitado que o procedimento de minimização apresente um único mínimo global.

Em continuidade ao que foi mencionado, para inserir as restrições de entradas e saídas do controle, é requisitado que a norma euclidiana desses sinais apresente um valor menor ou igual ao valor máximo estabelecido. É possível verificar essas restrições que foram adicionadas nas equações (2.21) e (2.22).

$$\|u_r(k+i|k)\| \leq u_{x_u, \max}, \quad i \geq 0, \quad x_u = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (2.21)$$

$$\|y_r(k+i|k)\| \leq y_{z_y, \max}, \quad i \geq 0, \quad z_y = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2.22)$$

Em conformidade com Kothare *et al.* (1996), quando o critério de estabilidade de Lyapunov é empregado em sistemas discretos no espaço de estados e são sujeitos a incertezas politópicas ou fracionárias, pode-se encontrar o ganho de realimentação de estados que consiga minimizar o limite superior do índice de desempenho a um horizonte de predição infinito  $J_{\infty}(k)$ . Porém, com a ressalva de que a presença de solução para o problema de otimização associado

é uma determinação essencial para a aplicabilidade desses resultados. Para isso, verifica-se os Teoremas 1 e 2 demonstrados a seguir.

**Teorema 1** (Kothare *et al.* (1996)). *Mediante um sistema que foi modelado no espaço de estados, que está subjulgado a um conjunto de incertezas politópicas assim como visto (2.23).*

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ [A(k) \ B(k)] &\in \Omega \end{aligned} \quad (2.23)$$

Tal que, o ganho de realimentação de estados representado por  $K = YS^{-1}$  para uma determinada lei de controle onde  $u(k+i|k) = Kx(k+i|k)$ ,  $\forall i \geq 0$ , pode ser identificado caso haja  $S = S^T \geq 0$ ,  $Y \geq 0$ ,  $X \geq 0$  e  $Z \geq 0$  de forma que o processo de otimização (2.24)–(2.27) seja factível para  $X_{x_u} \leq u_{x_u, \max}^2$ ,  $x_u = 1, 2, 3, \dots, m$ ,  $Z_{z_y} \leq y_{z_y, \max}^2$ ,  $z_y = 1, 2, 3, \dots, n$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, N$ , em que  $N$  é o número de vértices do politopo. Assim, têm-se que,

$$\min_{\gamma, S, Y} \gamma \quad (2.24)$$

Estando sujeito à:

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ x(k|k) & S \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.25)$$

$$\begin{bmatrix} S & * & * & * \\ A_j S + B_j Y & S & * & * \\ Q_c^{1/2} S & 0 & \gamma I & * \\ R_c^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.26)$$

Apresentando as restrições de entrada e saída como expressas por,

$$\begin{bmatrix} X & * \\ Y & S \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} Z & * \\ C(A_j S + B_j Y) & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.27)$$

**Prova do Teorema 1.** *Caso haja o interesse de uma análise na prova do teorema citado é sugerido que seja feita uma consulta bibliográfica em Kothare *et al.* (1996).* □

**Teorema 2** (Kothare *et al.* (1996)). *Admita um sistema representado no espaço de estados, que estará sujeito à incertezas fracionárias. Essa característica pode ser formalizada matematicamente pela Equação (2.28).*

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Pp(k) \\
 q(k) &= Ex(k) + Fu(k) \\
 y(k) &= Cx(k) \\
 p(k) &= \Delta q(k)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

*Além do que, é importante destacar que o ganho de realimentação de estados expresso por  $K = YS^{-1}$  direcionado para uma lei de controle que  $u(k+i|k) = Kx(k+i|k)$ ,  $\forall i \geq 0$ , pode ser obtido caso exista uma  $S = S^T \geq 0$ ,  $Y \geq 0$ ,  $X \geq 0$ ,  $Z \geq 0$  e  $T^{-1} \geq 0$  que faça com que o processo de otimização (2.29)–(2.29) seja factível para  $X_{x_u} \leq u_{x_u, \max}^2$ ,  $x_u = 1, 2, 3, \dots, m$ ,  $Z_{z_y} \leq y_{z_y, \max}^2$  e  $z_y = 1, 2, 3, \dots, n$ .*

$$\min_{\gamma, S, Y, \Lambda} \gamma \tag{2.29}$$

*Estando sujeito à:*

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ x(k|k) & S \end{bmatrix} \geq 0, \tag{2.30}$$

$$\begin{bmatrix} S & * & * & * & * \\ AS + BY & S - P\Lambda P^T & * & * & * \\ ES + FY & 0 & \Lambda & * & * \\ Q_c^{1/2}S & 0 & 0 & \gamma I & * \\ R_c^{1/2}Y & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \tag{2.31}$$

*Tal que, as restrições de entrada e saída são dadas por,*

$$\begin{bmatrix} X & * \\ Y & S \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} ZS & * & * \\ ES + FY & T^{-1} & * \\ C(A_jS + B_jY) & 0 & I - CPT^{-1}P^TC^T \end{bmatrix} \geq 0 \tag{2.32}$$

Onde,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n \times 1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n \times 2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{n \times r} \end{bmatrix} \geq 0, \quad T = \begin{bmatrix} t_1 I_{n \times 1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 I_{n \times 2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t_r I_{n \times n} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.33)$$

**Prova do Teorema 2.** *Caso haja o interesse de uma análise mais profunda, a prova do teorema citado encontra-se em Kothare et al. (1996).*  $\square$

## 2.4 Introdução aos Sistemas LPV-Afim

A modelagem e controle de sistemas com parâmetros variantes é um tópico importante na teoria de controle (BRIAT, 2015). Um tipo específico de sistema com parâmetros variantes é o sistema LPV (Linear Parameter-Varying), que descreve um sistema dinâmico cujo comportamento é afetado por parâmetros que variam continuamente (BRIAT, 2015). O termo "afim" refere-se à estrutura linear das equações que descrevem o sistema.

O conceito de sistemas LPV afim foi introduzido para permitir a modelagem de sistemas complexos, nos quais os parâmetros variantes afetam de forma linear as equações de estado do sistema (APKARIAN; GAHINET, 1995). Esses parâmetros podem ser, por exemplo, a velocidade do vento em um sistema de controle de voo de uma aeronave, a temperatura ambiente em um sistema de controle de um processo industrial ou a carga em um sistema de controle de motores elétricos (DORF; BISHOP, 2016).

De acordo com Briat (2015), a forma geral de um sistema LPV afim é expressa por

$$\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t)$$

onde  $x(t)$  é o vetor de estados do sistema,  $u(t)$  é o vetor de entrada,  $\rho$  é o vetor de parâmetros variáveis e as matrizes  $A(\rho)$  e  $B(\rho)$  são funções afins dos parâmetros.

A modelagem e análise de sistemas LPV afim envolvem técnicas que permitem lidar com a variação contínua dos parâmetros. Diferentes abordagens têm sido propostas, incluindo o uso de teoria de sistemas lineares, teoria de sistemas não lineares, teoria de controle robusto e técnicas de otimização (BRIAT, 2015; DEUTSCHER, 2009).

No contexto do controle, o objetivo é projetar leis de controle robustas que levem em consideração a variação dos parâmetros e garantam estabilidade e desempenho adequados do

sistema. Isso geralmente envolve a utilização de técnicas de controle adaptativo, controle ótimo ou controle baseado em observadores (CHEN, 1999).

A teoria de sistemas LPV afim tem sido aplicada em diversas áreas, como em controle de processos industriais, controle de veículos autônomos, controle de aeronaves e controle de sistemas de energia Smith e Johnson (2019). Sua aplicação permite modelar e controlar de forma mais precisa sistemas que estão sujeitos a mudanças nas condições operacionais.

Em resumo, os sistemas LPV afim fornecem uma estrutura matemática flexível para modelar e controlar sistemas dinâmicos com parâmetros variantes (MARTINS; SILVA, 2020). Essa abordagem permite uma representação mais precisa de sistemas complexos, levando em consideração a influência contínua dos parâmetros variantes (GARCIA; HERNANDEZ, 2018).

## 2.5 Controle Preditivo Baseado em Modelo Comutado

No decorrer deste capítulo, serão abordadas as formulações do SR-MPC via LMIs tanto a que pode ser implementadas nos projetos *online* quando nos *offline*, bem como, verificar as configurações de realimentação de estados em sistemas LPV.

Assim como visto em Esfahani e Pieper (2019) e Benallouch *et al.* (2014), com o intuito de obter a síntese do SR-MPC, para os dois equacionamentos mencionados, o índice de desempenho quadrático a um horizonte de predição infinito é expresso pela equação (2.34).

$$J_{\infty}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \|x(k)\|_{R_x}^2 + \|u(k)\|_{R_u}^2 - \lambda^2 \|w(k)\|_{R_w}^2 \quad (2.34)$$

Na equação (2.34), a expressão  $J_{\infty}(k)$ ,  $\forall k \geq 0$  simboliza o quanto a ação de controle consumiu de energia, o termo  $\lambda > 0$  é a constante de atenuação de ruído,  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  esses representam os estados do sistema, no qual o sinal de controle é mostrado por  $u(k) \in \mathbb{R}^m$ . Já a expressão  $w(k) \in \mathbb{R}^r$  descreve uma entrada exógena ao sistema, que será demonstrada no equacionamento (2.35). Finalmente, apresentam-se as matrizes que ponderam o sistema, que por sua vez, são descritas como  $R_x > 0$ ,  $R_u > 0$  e  $R_w > 0$ .

$$\mathbb{W} = \left\{ w \in \mathbb{R}^r \mid \|W\|_{\mathcal{L}_2^r} \leq w_{\max} \right\} \quad (2.35)$$

### 2.5.1 SR-MPC via Função de Lyapunov Múltipla

A função de Lyapunov múltipla se apresenta como uma extensão das funções de Lyapunov convencionais, que já são amplamente utilizadas para analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos. No contexto do SR-MPC, a função de Lyapunov múltipla é aplicada para lidar com restrições de estado e de controle de maneira mais flexível. Já que, ela permite a consideração simultânea de múltiplas regiões de estabilidade, o que é bastante útil em sistemas comutados, sistemas com múltiplos modos de operação ou sistemas sujeitos a incertezas (NIU *et al.*, 2019). Dessa maneira, considerando o sistema linear sujeito a comutação, no qual (2.36).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + W_{\sigma(k)}w(k) \\ y(k) &= C_{\sigma(k)}x(k) + D_{\sigma(k)}u(k) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Verifica-se que na expressão (2.36),  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  são os estados do sistema, já o sinal de controle é atribuído por  $u(k) \in \mathbb{R}^m$ , em que o sinal de saída será dado por  $y(k) \in \mathbb{R}^q$  onde a perturbação exógena assume  $w(k) \in \mathbb{R}^r$ , tal qual foi descrito em (2.35).

Entendendo que as matrizes irão variar de acordo com a regra de comutação, que adota, em determinados instantes de tempo um conjunto formado pelos  $N$  subsistemas que estão com disponibilidade para o chaveamento, verificar a Equação (2.37). Portanto, os termos definidos por  $A, B, W, C$  e  $D$ , são respectivamente os estados, a entrada, a perturbação, a saída e a transição direta do sistema.

$$\sigma(k) \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, N\}, \quad \forall k \geq 0 \quad (2.37)$$

Através do critério de estabilidade baseado em múltiplas funções de Lyapunov direcionadas para sistemas chaveados, como em (2.38), isso aliado a regra de comutação definida pela expressão (2.39) GEROMEL; COLANERI (2006a, 2006b).

$$V(x(k|k), \sigma(k)) = x(k|k)^T Q_{\sigma(k)} x(k|k) \quad (2.38)$$

$$\sigma(x(k)) = \arg \min_{\sigma(k) \in \mathbb{N}} x(k|k)^T Q_{\sigma(k)} x(k|k) \quad (2.39)$$

Verificando as equações (2.38) e (2.39), têm-se que  $Q_{\sigma(k)}$  é a matriz de estabilidade do subsistema relacionada ao instante  $k$ . Além disso, também foi presumida a possibilidade de restrições sobre o sinal de controle definido em (2.40) bem como, sobre o comportamento dos estados, de acordo com o que será expresso em (2.41),

$$\mathbb{U} = \{u(k) : -u_{\text{lim}}^{z_d} \leq u^{z_d}(k) \leq u_{\text{lim}}^{z_d}, z_d = 1, 2, \dots, m\} \quad (2.40)$$

$$\mathbb{X} = \{x(k) : -x_{\text{lim}}^{v_d} \leq x^{v_d}(k) \leq x_{\text{lim}}^{v_d}, v_d = 1, 2, \dots, n\} \quad (2.41)$$

Já que o objetivo é sempre encontrar a minimização do índice de desempenho, que foi dado em (2.34) e assumindo que as matrizes de ponderação do sistema são dadas por  $R_x = C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} > 0$ ,  $R_u = D_{\sigma(k)}^T D_{\sigma(k)} > 0$  e  $R_w > 0$  é possível formular o Teorema 3 que foi proposto por Carvalho *et al.* (2020).

**Teorema 3** (Proposto por Carvalho *et al.* (2020)). *Assuma o sistema linear sujeito a comutação como observado em (2.36) e sujeito as restrições expressadas por (2.40) – (2.41) adotando uma lei de controle  $u(k) = K_{\sigma(k)}x(k)$  com  $K_{\sigma(k)} = Y_{\sigma(k)}G_{\sigma(k)}^{-1}$ . Obtem-se os ganhos de realimentação de estados,  $K_{\sigma(k)} \in \{K_1, K_2, K_3, \dots, K_N\}$ , de tal forma que para cada subsistema que estiver apto no avançar do processo de comutação, caso haja  $S_{\sigma(k)} = S_{\sigma(k)}^T \geq 0$ ,  $G_{\sigma(k)} \geq 0$ ,  $Y_{\sigma(k)} > 0$ ,  $Z_{\sigma(k)} > 0$ ,  $V_{\sigma(k)} > 0$ ,  $\eta > 0$  e  $\mu > 0$ , de modo que o processo de otimização (2.42) – (2.46) seja factível.*

$$\min_{S_{\sigma}, G_{\sigma}, Y_{\sigma}} \eta \quad (2.42)$$

Submetido à:

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & * & * & * \\ A_i G_i + B_i Y_i & S_j & * & * \\ C_i G_i + D_i Y_i & 0 & \eta I & * \\ 0 & \eta W_i^T & 0 & \eta \mu R_w \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.43)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \mu w_{\max}^2 & \eta \mu w_{\max}^2 & * \\ x(k|k) & 0 & S_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.44)$$

Bem como, as restrições de entrada e saída

$$\begin{bmatrix} Z_i & * \\ Y_i & G_i + G_i^T - S_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.45)$$

$$\begin{bmatrix} V_i & * & * \\ A_i G_i + B_i Y_i & \omega_{\max}^{-1} (G_i + G_i^T - S_i) & * \\ W_i & 0 & \omega_{\max}^{-1} I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.46)$$

**Prova do Teorema 3** (Proposto por Carvalho *et al.* (2020)). *Ver a referência base Carvalho et al. (2020) para a prova do teorema proposto nessa Seção.*

No Teorema 3, citado anteriormente, apresenta-se  $Z_i^{z_d} \leq (u_{\lim}^{z_d})^2$  e  $V_i^{v_d} \leq (x_{\lim}^{v_d})^2$  para,  $z_d = 1, 2, 3, \dots, m$  e  $v_d = 1, 2, 3, \dots, n$ . Além do que, a perturbação limitada em norma é representada por  $w_{\max}$  e  $\omega_{\max} = 1 + w_{\max}^2$ , a constante de atenuação é dada por  $\lambda = \sqrt{\mu}$  já o limite superior do índice de desempenho é definido por  $\beta = \sqrt{\eta}$ . Ainda assim, é preciso ressaltar que o processo de otimização proposto pode ser elaborado dependendo de  $\mu$  ou  $\eta$  com o intuito de evitar problemas de bilinearidades, ao referir-se a  $\eta$  ou  $\mu$  como função objetivo a outra variável passará a ser parâmetro de projeto (CARVALHO *et al.*, 2020).

Levando em consideração as LMIs que constituem o processo de minimização descrito no Teorema 3, é importante compreender que a lei de controle dada por  $u(k) = K_{\sigma(k)} x(k)$ , na qual,  $K_{\sigma(k)} = Y_{\sigma(k)} G_{\sigma(k)}^{-1}$ , resulta diretamente da LMI que foi descrita na (2.43). A LMI garante a estabilidade do sistema submetido a comutação (2.36) através da minimização do índice de desempenho (2.34). Em compensação, a robustez do sistema durante à ação de controle não é assegurada.

Visando resolver essa questão, empregou-se a abordagem de projeto citada por Kothare *et al.* (1996). Nessa metodologia, a presença de elipsoides invariantes que delimitam o comportamento dos estados no plano correspondente é utilizada para assegurar a robustez do controle durante todo o processo. Portanto, a variação ocorrerá em decorrência da regra de comutação explicitada na Equação (2.38), as elipsoides de estabilidade, serão submetidas ao chaveamento entre os  $N$  subsistemas disponíveis no decorrer da ação de comutação, são definidas por (2.47).

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^T G_{\sigma(k)}^{-1} x \leq 1 \right\} \quad (2.47)$$

Dessa maneira, com a aplicação desse artifício na síntese do controlador, decorrente da formulação da LMI (2.44), o que se torna um dos maiores e melhores benefícios do presente trabalho em confronto com a maioria das pesquisas que envolvem o controle preditivo para sistemas lineares sujeitos a comutação. Finalmente, vale destacar que as LMIs dadas por (2.45) e (2.46) se referem, respectivamente, as restrições do sinal de controle e do comportamento dos estados (2.40) e (2.41), quando aliados a regra de comutação resulta em (2.38). Assim, o modelo sugerido faz com que o sistema em malha fechada seja globalmente assintoticamente estável.

### 2.5.2 SR-MPC via Função de Lyapunov–Metzler

Segundo (CARVALHO *et al.*, 2020), para iniciar esse contexto, dado um sistema linear sujeito a comutação de acordo com (2.48), onde as incertezas do modelo são expressas na forma fracionária ou paramétricas, sendo que as perturbações são ponderadas através de uma realimentação como é possível verificar na Figura 16.

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + P_{\sigma(k)}p(k) + W_{\sigma(k)}w(k) \\
 y(k) &= C_{\sigma(k)}x(k) + D_{\sigma(k)}u(k) + G_{\sigma(k)}w(k) \\
 q(k) &= E_{\sigma(k)}x(k) + F_{\sigma(k)}u(k) + H_{\sigma(k)}p(k) \\
 p(k+1) &= \Delta(k)q(k)
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Verificando a (2.48), é possível constatar que  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  são os estados do sistema,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de controle,  $y(k) \in \mathbb{R}^z$  é o sinal de saída,  $w(k) \in \mathbb{R}^r$  é uma entrada exógena ao sistema, expressa por (2.35).

Nesse diagrama de blocos 16 abordado por Carvalho *et al.* (2020), é válido destacar que se a realimentação de incertezas que ocorre for nula, todo aquele grupo de equações que foi definido em (2.48) resultará no conjunto de equações que compõe o bloco localizado na parte inferior da Figura 16.

Além disso, percebe-se que é o mesmo processo de projeto que foi aplicado na seção 2.5.1. Porém, assumindo o critério de estabilidade de Lyapunov–Metzler para sistemas chaveados. Têm-se, portanto, a possibilidade de formular o teorema 4 proposto por Carvalho *et al.* (2020) com o mesmo objetivo acerca da minimização do índice de desempenho (2.34) definindo também as matrizes de ponderação do controle como  $R_x = C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} > 0$ ,  $R_u = D_{\sigma(k)}^T D_{\sigma(k)} > 0$  e  $R_w > 0$ . Assim, a seguir segue a descrição do Teorema 4.

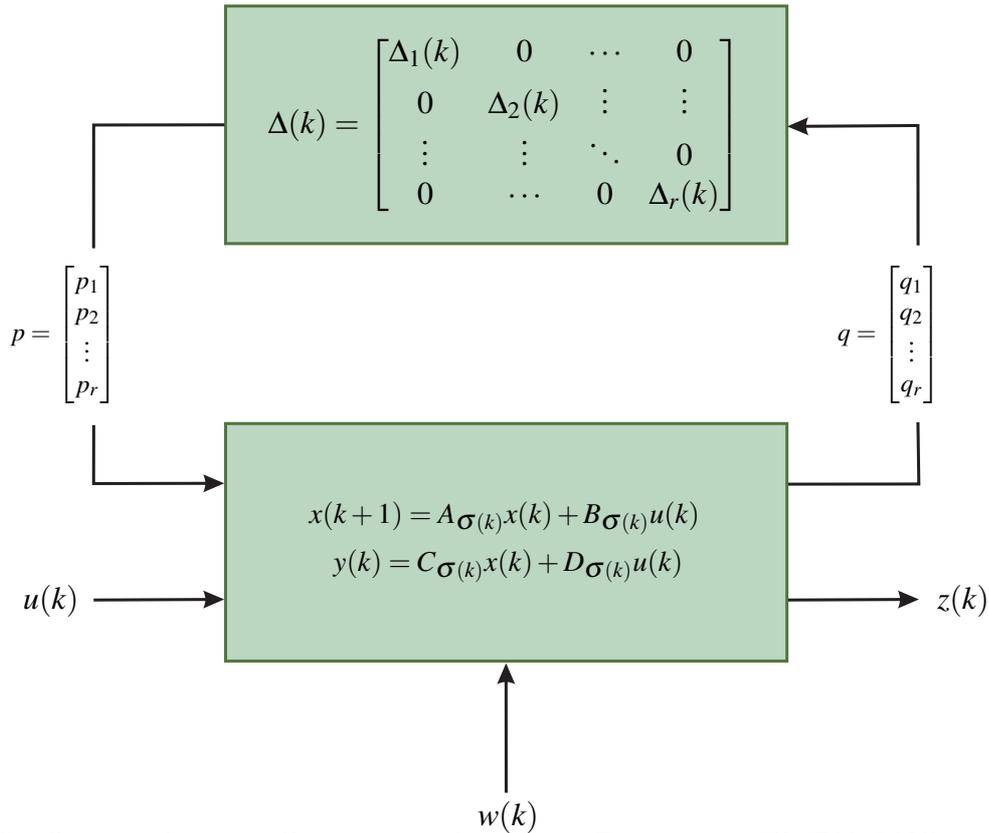


Figura 2 – Sistema Sujeito a Comutação e Incertezas Fracionárias (CARVALHO *et al.*, 2020).

**Teorema 4** (Proposto por Carvalho *et al.* (2020)). *De acordo com o sistema expressado em (2.48), estando sujeito a lei de controle dada por  $u(k) = K_{\sigma(k)}x(k)$  com  $K_{\sigma(k)} = Y_{\sigma(k)}S_{\sigma(k)}^{-1}$ . Logo, é pode-se estipular o ganho de realimentação de estados,  $K_{\sigma(k)} \in \{K_1, K_2, K_3, \dots, K_N\}$ , para cada subsistema que esteja acessível durante o processo de chaveamento, se houverem  $S_{\sigma(k)} = S_{\sigma(k)}^T \geq 0$ ,  $T_{\sigma(k)} = T_{\sigma(k)}^T \geq 0$ ,  $Y_{\sigma(k)} \geq 0$ ,  $J_{\sigma(k)} \geq 0$  e  $0 \leq \eta \leq 1$ , de tal forma que o processo de otimização (2.49) – (2.52) seja factível.*

$$\min_{S_{\sigma}, Y_{\sigma}, \Lambda} \gamma \quad (2.49)$$

Sujeito à:

$$\begin{bmatrix} S_i & * & * & * & * & * \\ 0 & \Lambda' & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \gamma \lambda^2 R_w I & * & * & * \\ A_i S_i + B_i Y_i & P_i \Lambda' & \gamma W_i & V'_{ij} & * & * \\ E_i S_i + F_i Y_i & H_i \Lambda' & 0 & 0 & \Lambda' & * \\ C_i S_i + D_i Y_i & 0 & \gamma G_i & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.50)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \lambda^2 w_{\max}^2 & \gamma \lambda^2 w_{\max}^2 & * \\ x(k|k) & 0 & S_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.51)$$

$$\begin{bmatrix} T_i & * \\ J_i & S_j \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.52)$$

Pode-se então, dizer que  $V_{ij} = J_i + J_i^T - (\eta T_i + (1 - \eta) T_j)$ , para  $i \neq j = 1, 2, 3, \dots, N$ ,  $\Lambda' = \gamma \Lambda$ ,  $V'_{ij} = \gamma V_{ij}$  e  $\Lambda = (\lambda_1 I, \lambda_2 I, \lambda_3 I, \dots, \lambda_r I) \geq 0$ .

**Prova do Teorema 4.** (Proposto por (CARVALHO *et al.*, 2020))

Caso o leitor tenha interesse em aprofundar-se na prova do teorema basta consultar a bibliogra de (CARVALHO *et al.*, 2020)

Nesse Teorema 4, a perturbação limitada em norma é definida por  $w_{\max}$  e  $\omega_{\max} = 1 + w_{\max}^2$ , onde a constante de atenuação é  $\lambda$  e o limite superior do índice de desempenho é dado por  $\gamma$  assim como visto em Benallouch *et al.* (2014). De forma análoga aos outros teoremas que foram descritos nesse trabalho, é importante validar que o processo de otimização proposto pode ser realizado em função de  $\lambda$  ou  $\gamma$ . Se tratar uma das variáveis como função objetivo a outra será tratada como parâmetro de projeto, isso evitará problemas de bilinearidade.

## 2.6 SR-MPC-LPV - Algoritmos *online* e *offline*

O SR-MPC, que foi caracterizado pelos teoremas propostos nas seções anteriores 2.5.1 e 2.5.2, pode ser implementado por meio de duas metodologias distintas: algoritmo *online* e algoritmo *offline*.

No algoritmo *online*, o ganho do controlador é definido de forma automática a cada instante de amostragem. O que resulta em um aumento do esforço computacional à medida que a complexidade dos processos de controle aumentam (WAN; KOTHARE, 2003).

Em contrapartida, o algoritmo *offline* se resume em obter a lei de controle através de interpolações em uma tabela de busca (LUT) baseada no conceito de elipsoides de estabilidade proposto por Kothare *et al.* (1996). A vantagem dessa técnica é que a sua aplicação permite simplificar a implementação da lei de controle, já que, a partir disso, basta apenas inserir a LUT

em um microcontrolador para a realização de diversas aplicações práticas, como a aplicação em conversores *Boost*.

A partir disso, os Algoritmos 1 e 2, de forma respectiva, indicam de maneira lúdica e prática a metodologia de implementação dos *Design online* e *offline* do SR-MPC que foi proposto neste trabalho.

**Algoritmo 1. (SR-MPC-LPV Online)**

*Dada uma condição inicial  $x(0)$ , tal que essa respectiva condição seja satisfeita:*

$$\|x(0)\|_{G_{\sigma(k)}^{-1}}^2 \leq 1 \text{ ou } \|x(0)\|_{S_{\sigma(k)}^{-1}}^2 \leq 1$$

*Tome  $k := 1$ , então siga os passos:*

*I Através da implementação do Teorema 5, determinar o ganho de realimentação de estados e a matriz de estabilidade que descrevem a elipsoide de estabilidade, que circunscreve os estados do sistema no instante  $k$ .*

*II Enquanto  $k \leq k_{\text{end}}$ , verificar se a respectiva condição é satisfeita:*

$$\|x(k)\|_{G_{\sigma(k)}^{-1}}^2 \leq 1 \text{ ou } \|x(k)\|_{S_{\sigma(k)}^{-1}}^2 \leq 1$$

*i – Se não, pare o processo iterativo;*

*ii – Se sim, faça  $k := k + 1$  e retorne ao passo I.*

**Algoritmo 2. (SR-MPC Offline)**

*Admita uma condição inicial baseada na resposta ao impulso  $x_{\text{set}} \in \mathbb{X}^s$ . Considere uma sequencia de minimizadores por meio da implementação do Teorema 3 ou 4.*

*Tome  $k := 1$ , então siga os passos:*

*I Avalie os minimizadores, parâmetros de implementação do respectivo Teorema, aplicando a restrição adicional  $G_{k-1} > G_k$  ou  $S_{k-1} > S_k$  (ignore para  $k = 1$ ) e acumule as matrizes de estabilidade e os ganhos em uma tabela de ganhos.*

*II Enquanto  $k \leq k_{\text{end}}$ , verificar se a respectiva condição é satisfeita:*

$$\|x_{k+1}\|_{G_{\sigma(k)}^{-1}}^2 \leq 1 \text{ ou } \|x_{k+1}\|_{S_{\sigma(k)}^{-1}}^2 \leq 1.$$

*i – Se não, pare o processo iterativo;*

*ii – Se sim, faça  $k := k + 1$  e retorne ao passo I.*

*III Se  $k > k_{\text{end}}$ , aplique a lei de controle, sendo  $K_{\sigma(k)} = Y_{\sigma(k)} G_{\sigma(k)}^{-1}$  ou  $K_{\sigma(k)} = Y_{\sigma(k)} S_{\sigma(k)}^{-1}$*

*Calculada a partir da tabela de ganhos construída nos passos anteriores.*

### 3 ESTRATÉGIA DE CONTROLE PROPOSTA

Neste capítulo será apresentada a estratégia de controle adotada nas duas aplicações sugeridas nesse estudo, ou seja, a técnica SR-MPC via LMI para o controle de tensão de saída do conversor Boost 3SSC, bem como a abordagem SR-MPC LMI para sistemas LPV com comutação. Portanto, este capítulo será organizado para apresentar as duas propostas.

#### 3.1 Modelagem do Conversor

O esquemático do conversor Boost é apresentado na Figura 3, visto em Bascope e Barbi (2000) e Costa *et al.* (2017). Além disso, a Tabela 1 mostra os parâmetros de entrada usados para o conversor deste trabalho.

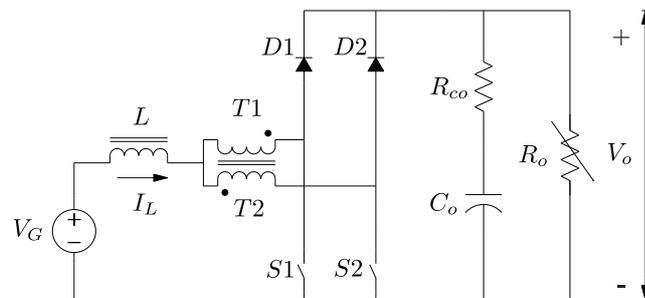


Figura 3 – Conversor Boost com célula de comutação de três estados.

Tabela 1 – Parâmetros do Conversor Boost.

Parâmetros	Valores
Tensão de Entrada ( $V_g$ )	26 – 36 [V]
Tensão de Saída ( $V_o$ )	48 [V]
Ciclo de Trabalho ( $D_{cycle}$ )	0,25 – 0,46
Frequência de chaveamento ( $f_s$ )	22 [kHz]
Indutor de Filtro ( $L$ )	36 [ $\mu H$ ]
Resistência Indutiva ( $R_L$ )	0 [ $\Omega$ ]
Capacitor de saída ( $C_o$ )	4.400 [ $\mu F$ ]
Resistência série ( $R_{co}$ )	26,7 [ $\mu \Omega$ ]
Carga ( $R_o$ )	2,034 – 6,06 [ $\Omega$ ]
Potência de saída	380 – 1.000 [W]
Passo de amostragem	1 [ms]

As equações no espaço de estados  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  do conversor operando no Modo de Condução Contínuo (*Continuous Driving Mode* - CDM) Middlebrook1976, Rego2018 são dadas

por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Em que,

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_L + (1 - D_{cycle})(R_{co} \parallel R_o)}{L} & -\frac{(1 - D_{cycle})R_o}{L(R_{co} + R_o)} \\ \frac{(1 - D_{cycle})R_o}{C_o(R_{co} + R_o)} & -\frac{1}{C_o(R_{co} + R_o)} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{R_{co}}{L} \frac{(1 - D_{cycle})R_o + R_{co}}{(R_{co} + R_o)} \\ -\frac{R_o}{C_o(R_{co} + R_o)} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$C = \left[ (1 - D_{cycle})(R_{co} \parallel R_o) \frac{R_o}{(R_{co} + R_o)} \right] \quad (3.4)$$

$$D = -V_g \frac{R_{co} \parallel R_o}{R'} \quad (3.5)$$

Onde  $R' = (1 - D_{cycle})^2 R_o + D_{cycle}(1 - D_{cycle})(R_{co} \parallel R_o)$ . Os estados do sistema,  $x = [i_L \ v_c]^T$ , são respectivamente a corrente no indutor ( $L$ ) e a tensão no capacitor ( $C_o$ ),  $D_{cycle}$  é o ciclo de trabalho,  $u$  é o sinal de controle,  $y$  é a tensão de saída ( $V_o$ ).

### 3.2 Abordagem Linear Chaveada e Politópica

A teoria de sistemas lineares comutados é dividida em dois grupos. No primeiro grupo, a regra de comutação  $\sigma(\cdot)$  não depende de estados equivalentes à incerteza variante no tempo. No segundo grupo,  $\sigma(\cdot)$  é uma variável de controle que depende do estado ou do sistema. Em ambos os grupos, o principal objetivo é obter uma regra de comutação  $\sigma(\cdot)$  que assegure a estabilidade assintótica global do sistema (DEAECTO; GEROMEL, 2008). Considerando este contexto,

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k), \quad x(0) = x_0. \quad (3.6)$$

Para todo  $k \geq 0$ , no qual  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o estado e é disponível para realimentação,  $\sigma(k)$  é a regra de comutação e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  como condição inicial. Dessa forma, em cada instante de tempo a regra de comutação seleciona uma matriz  $A_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pertencente a  $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_N\}$ . As condições de estabilidade global são adquiridas assumindo a função de Lyapunov dada por:

$$v(x) = \min_{i \in \mathbb{K}} x' P_i x = \min_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i x' P_i x \right) \quad (3.7)$$

Onde,  $P_i, \forall i \in \mathbb{K}$  são matrizes simétrica definidas positivas e  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  um elemento pertencente ao conjunto convexo  $\Lambda$  definido como,

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\} \quad (3.8)$$

De modo que venha a facilitar, é definido o conjunto de índices  $I(x) = i \in \mathbb{K} : v(x) = x' P_i x \subset \mathbb{K}$ , constatando que, para os casos que a minimização expressa por (3.7) não for única, o conjunto  $I(x)$  irá conter mais de um elemento Deaecto e Geromel (2008). Portanto, o intuito é encontrar uma regra de comutação  $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ , bem como as condições para que  $\sigma(k) = g(x(k))$  atue de maneira que a origem do sistema 3.6 seja um ponto de equilíbrio global. Para isso há um Teorema, que pode ser consultado em Geromel e Colaneri (2006a), que satisfaz essas condições, no qual também determinará um limitante superior para um custo que submete-se quadraticamente as variáveis de estado do sistema em malha fechada.

### 3.2.1 Controle Preditivo baseado em Modelo Comutado

Baseado em Benallouch *et al.* (2014) e Esfahani e Pieper (2019), considere o sistema linear sujeito a comutação conforme (3.9).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\sigma(k)} x(k) + B_{\sigma(k)} u(k) + W_{\sigma(k)} w(k) \\ z(k) &= C_{\sigma(k)} x(k) + D_{\sigma(k)} u(k) \end{aligned} \quad (3.9)$$

No sistema (3.9),  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  são os estados do sistema,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de controle,  $z(k) \in \mathbb{R}^q$  é o sinal de saída,  $w(k) \in \mathbb{R}^r$  é a perturbação exógena ao sistema, definida em (3.10).

As matrizes  $A_{\sigma(k)}$ ,  $B_{\sigma(k)}$ ,  $W_{\sigma(k)}$ ,  $C_{\sigma(k)}$  e  $D_{\sigma(k)}$  correspondem aos estado, entrada, perturbação, saída e a matriz de transição direta, sendo que todas estas variam de acordo com a regra de comutação que a cada instante de tempo seleciona um dado modelo local do conjunto composto

pelos  $N$  subsistemas, que descrevem a dinâmica do modelo global, disponíveis para a ação de chaveamento, como expresso em (3.10) e (3.11).

$$\mathbb{W} = \left\{ w \in \mathbb{R}^r \mid \|W\|_{\mathcal{L}_2^r} \leq w_{\max} \right\} \quad (3.10)$$

$$\sigma(k) \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, N\}, \quad \forall k \geq 0 \quad (3.11)$$

Fundamentado em Geromel e Colaneri (2006b), é assumido o critério de estabilidade de Lyapunov para sistemas chaveados e a regra de comutação, dadas respectivamente pelas equações (3.12) e (3.13).

$$V(x(k|k), \sigma(k)) = x(k|k)^T P_{\sigma(k)} x(k|k) \quad (3.12)$$

$$\sigma(x(k)) = \arg \min_{\sigma(k) = i \in \mathbb{N}} x(k|k)^T P_{\sigma(k)} x(k|k) \quad (3.13)$$

Nas expressões (3.12) e (3.13),  $P_{\sigma(k)}$  é a matriz de estabilidade do respectivo subsistema e a notação  $x(k_1|k_2)$  corresponde aos estados do sistema no instante  $k_1$  preditos a partir do momento  $k_2$ .

Suponha, ainda, que existam restrições impostas ao sinal de controle e ao comportamento dos estados, como descritas, respectivamente, em (3.14) e (3.15).

$$\mathbb{U} = \{u(k) : -u_{\text{lim}}^{z_d} \leq u^{z_d}(k) \leq u_{\text{lim}}^{z_d}, \quad z_d = 1, 2, 3, \dots, m\} \quad (3.14)$$

$$\mathbb{X} = \{x(k) : -x_{\text{lim}}^{v_d} \leq x^{v_d}(k) \leq x_{\text{lim}}^{v_d}, \quad v_d = 1, 2, 3, \dots, n\} \quad (3.15)$$

Para a síntese do SR-MPC, considere o índice de desempenho quadrático IH, como proposto por Benallouch *et al.* (2014), expresso em (3.16).

$$J_{\infty}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \|x(k)\|_{R_x}^2 + \|u(k)\|_{R_u}^2 - \lambda^2 \|w(k)\|_{R_w}^2 \quad (3.16)$$

No índice de desempenho (3.16),  $\lambda > 0$  corresponde a constante de atenuação do ruído,  $R_x = C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} > 0$ ,  $R_u = D_{\sigma(k)}^T D_{\sigma(k)} > 0$  e  $R_w > 0$ . Pode-se obter o ganho de realimentação de

estados dado por  $F_{\sigma(k)} = Y_{\sigma(k)} G_{\sigma(k)}^{-1}$ , para  $G_{\sigma(k)} \geq 0$  e  $S_{\sigma(k)} = S_{\sigma(k)}^T \geq 0$ , se o seguinte processo de otimização for factível.

$$\min_{S_\sigma, G_\sigma, X_\sigma} \eta \quad (3.17)$$

Sujeito à:

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & * & * & * \\ A_i G_i + B_i X_i & S_j & * & * \\ C_i G_i + D_i X_i & 0 & \eta I & * \\ 0 & \eta W_i^T & 0 & \eta \mu R_w \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \mu w_{\max}^2 & \eta \mu w_{\max}^2 & * \\ x(0) & 0 & S_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.19)$$

$$\begin{bmatrix} Z_i & * \\ X_i & G_i + G_i^T - S_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} V_i & * & * \\ A_i G_i + B_i X_i & \omega_{\max}^{-1} (G_i + G_i^T - S_i) & * \\ W_i & 0 & \omega_{\max}^{-1} I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.21)$$

Sendo  $Z_i \leq (u_{\text{lim}}^{z_d})^2$  e  $V_i \leq (x_{\text{lim}}^{y_d})^2$  sendo, respectivamente,  $z_d = 1, 2, 3, \dots, m$  e  $y_d = 1, 2, 3, \dots, n$ . O distúrbio limitado em norma é descrito por  $w_{\max}$  e  $\omega_{\max} = 1 + w_{\max}^2$ , a constante de atenuação e o limite superior do índice de desempenho são dados, respectivamente, por  $\lambda = \sqrt{\mu}$  e  $\beta = \sqrt{\eta}$ . É possível observar que a matriz de estabilidade do sistema segue os preceitos da metodologia de relaxamento proposta por Cuzzola *et al.* (2002), sendo esta usada para a análise de robustez via elipsoides de estabilidade.

Vale destacar que, o processo de otimização proposto pode ser feito em função de  $\mu$  ou  $\eta$  sendo que para evitar problemas de bilinearidades, trata-se  $\eta$  ou  $\mu$  como função objetivo e a outra variável como parâmetro de projeto.

### 3.3 Abordagem LPV Chaveada

Considere o sistema LPV sujeito à comutação baseado em (3.22).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\sigma(k)}(\alpha)x(k) + B_{\sigma(k)}(\alpha)u(k) + W_{\sigma(k)}(\alpha)w(k) \\ z(k) &= C_{\sigma(k)}(\alpha)x(k) + D_{\sigma(k)}(\alpha)u(k) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Na (3.22),  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  são os estados do sistema,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  são os sinais de controle,  $z(k) \in \mathbb{R}^q$  são os sinais de saída e  $w(k) \in \mathbb{R}^r$  representam perturbações externas, definidas em (3.23).

$$\mathbb{W} = \left\{ w \in \mathbb{R}^r \mid \|w\|_{\mathcal{L}_2^r} \leq w_{\max} \right\} \quad (3.23)$$

Em relação novamente a (3.22),  $\mathbf{A}(\alpha)$  é a matriz de estado,  $\mathbf{B}(\alpha)$  é a matriz de entrada,  $\mathbf{W}(\alpha)$  é a matriz de perturbação,  $\mathbf{C}(\alpha)$  é a matriz de saída e  $\mathbf{D}(\alpha)$  é a matriz de transmissão direta. Estas matrizes dependem do parâmetro LPV  $\alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$  e variam de acordo com uma regra de comutação em cada etapa de tempo  $k$ , que seleciona um modelo local determinado do conjunto  $\mathbb{N}$ . Este conjunto está disponível para o método de comutação conforme expresso na equação (3.24).

$$\sigma(k) \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, N\}, \quad \forall k \geq 0 \quad (3.24)$$

Com base em Geromel e Colaneri (2006a), Geromel e Colaneri (2006b), assumindo os critérios de estabilidade de Lyapunov para sistemas comutados, conforme apresentado em (3.25), e a regra de comutação expressa em (3.26).

$$V(x(k|k), \sigma(k)) = x(k|k)^T P_{\sigma(k)} x(k|k) \quad (3.25)$$

$$\sigma(x(k)) = \arg \min_{\sigma(k) = i \in \mathbb{N}} x(k|k)^T P_{\sigma(k)} x(k|k) \quad (3.26)$$

Suponha ainda que existam restrições impostas ao controle de sinal e aos estados acima mencionados expressos por (3.27) e (3.28), respectivamente.

$$\mathbb{U} = \{u(k) : -u_{\lim}^{z_d} \leq u^{z_d}(k) \leq u_{\lim}^{z_d}, z_d = 1, 2, \dots, m\} \quad (3.27)$$

$$\mathbb{X} = \{x(k) : -x_{\lim}^{v_d} \leq x^{v_d}(k) \leq x_{\lim}^{v_d}, v_d = 1, 2, \dots, n\} \quad (3.28)$$

Para a síntese de controle SR-MPC, considere o índice de desempenho IH expresso em (3.29) baseado em Benallouch *et al.* (2014) e Carvalho *et al.* (2023).

$$J_\infty(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \|x(k)\|_{R_x}^2 + \|u(k)\|_{R_u}^2 - \lambda^2 \|w(k)\|_{R_w}^2 \quad (3.29)$$

Em (3.29),  $\lambda > 0$  é a constante para atenuação de ruído, e  $R_x$ ,  $R_u$  e  $R_w$  são matrizes de ponderação definidas no projeto que correspondem aos estados, sinal de controle e perturbações externas, respectivamente. Estes podem ser generalizados da seguinte forma:  $R_x = C\sigma(k)^T C\sigma(k) > 0$ ,  $R_u = D\sigma(k)^T D\sigma(k) > 0$ , e  $R_w > 0$ .

Com base na teoria de fundo e nas considerações mencionadas nesta seção, o Teorema 5 é proposto da seguinte forma:

**Teorema 5.** *Considere um sistema LPV sujeito a comutação, como expresso em (3.22), com ou sem restrições (3.27) – (3.28), para obter uma lei de controle dada por  $u(k) = F_{\sigma(k)}x(k)$ . É possível determinar um conjunto de matrizes de estabilidade  $G_{\sigma(k)} \in \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_N\}$  e ganhos de realimentação  $F_{\sigma(k)} \in \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_N\}$  para cada subsistema disponível no processo de comutação, desde que  $S_{\sigma(k)} = S_{\sigma(k)}^T \geq 0$ ,  $G_{\sigma(k)} \geq 0$ ,  $V_{\sigma(k)} > 0$ ,  $X_{\sigma(k)} > 0$ ,  $Z_{\sigma(k)} > 0$ ,  $\eta > 0$ , and  $\mu > 0$ , onde o procedimento de otimização descrito por LMIs (3.30) – (5) é viável, com  $F_{\sigma(k)} = X_{\sigma(k)}G_{\sigma(k)}^{-1}$*

$$\min_{S_\sigma, G_\sigma, X_\sigma} \eta \text{ or } \mu \quad (3.30)$$

sujeito a:

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & * & * & * \\ A_i(\alpha)G_i + B_i(\alpha)X_i & S_j & * & * \\ C_i(\alpha)G_i + D_i(\alpha)X_i & 0 & \eta I & * \\ 0 & \eta W_i(\alpha)^T & 0 & \eta \mu R_w \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \mu w_{\max}^2 & \eta \mu w_{\max}^2 & * \\ x(k|k) & 0 & S_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} Z_i & * \\ X_i & G_i + G_i^T - S_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.33)$$

$$\begin{bmatrix} V_i & * & * \\ A_i(\alpha)G_i + B_i(\alpha)X_i & \omega_{\max}^{-1}(G_i + G_i^T - S_i) & * \\ W_i(\alpha) & 0 & \omega_{\max}^{-1}I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.34)$$

No Teorema 5,  $Z_i^{z_d} \leq (u_{\lim}^{z_d})^2$  e  $V_i^{v_d} \leq (x_{\lim}^{v_d})^2$  são as restrições de controle de sinal e estado, respectivamente, onde  $z_d = 1, 2, 3, \dots, m$  e  $v_d = 1, 2, 3, \dots, n$ . A perturbação limitada em norma é descrita por  $\omega_{\max} = 1 + w_{\max}^2$ , que representa uma perturbação externa.

De acordo com o procedimento de otimização apresentado por Carvalho *et al.* (2023), a função objetivo pode ser  $\mu$  ou  $\eta$ . Para evitar um problema de bilinearidade, um é escolhido como função objetivo e o outro como parâmetro de projeto, e vice-versa. O valor do parâmetro escolhido pode ser determinado arbitrariamente ou por meio de um algoritmo de busca. Neste estudo,  $\mu$  é selecionado como parâmetro de projeto, e seu valor é determinado empiricamente, enquanto  $\eta$  é usada como função objetivo. Assim, o Teorema 5 adota a abordagem proposta por Carvalho *et al.* (2023) para resolver seu problema de otimização.

**Prova do Teorema 5.** *Suponha que o sistema (3.22) possa ser reorganizado em um sistema de malha fechada, como (3.35).*

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A_{\sigma(k)}(\alpha) + B_{\sigma(k)}(\alpha)F_{\sigma(k)})x(k) + W_{\sigma(k)}(\alpha)w(k) \\ z(k) &= (C_{\sigma(k)}(\alpha) + D_{\sigma(k)}(\alpha)F_{\sigma(k)})x(k) \end{aligned} \quad (3.35)$$

*As matrizes de estado e o modelo de saída em malha fechada dados pelas equações (3.36) e (3.37) podem ser obtidos a partir da equação (3.35).*

$$\bar{A}_{\sigma(k)}(\alpha) = A_{\sigma(k)}(\alpha) + B_{\sigma(k)}(\alpha)F_{\sigma(k)} \quad (3.36)$$

$$\bar{C}_{\sigma(k)}(\alpha) = C_{\sigma(k)}(\alpha) + D_{\sigma(k)}(\alpha)F_{\sigma(k)} \quad (3.37)$$

*Para minimizar o índice de desempenho (3.29), os conceitos de filtragem de norma  $H_\infty$  e o teorema de estabilidade de Lyapunov definido em (3.25) precisam ser aplicados. As expressões*

(3.36) e (3.37) são usadas para obter a LMI definida em (3.38).

$$\begin{aligned}
& x(k)^T \left( \bar{A}_{\sigma(k)}^T(\alpha) P_{\sigma(k+1)} \bar{A}_{\sigma(k)}(\alpha) - P_{\sigma(k)} + \bar{C}_{\sigma(k)}^T(\alpha) \bar{C}_{\sigma(k)}(\alpha) \right) x(k) + \\
& w(k)^T \left( W_{\sigma(k)}^T(\alpha) P_{\sigma(k+1)} W_{\sigma(k)}(\alpha) - \lambda^2 R_w \right) w(k) + \\
& 2x(k)^T \left( \bar{A}_{\sigma(k)}^T(\alpha) P_{\sigma(k+1)} W_{\sigma(k)}(\alpha) \right) w(k) \leq 0
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Demonstrando  $x(k)^T$  e  $w(k)^T$  para ambos os lados em (3.38), é possível obter a seguinte expressão dada por (3.39).

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.39}$$

Na (3.39),  $M_{11} = \bar{A}(\alpha)_{\sigma(k)}^T P_{\sigma(k+1)} \bar{A}_{\sigma(k)}(\alpha) - P_{\sigma(k)} + \bar{C}_{\sigma(k)}^T(\alpha) \bar{C}_{\sigma(k)}(\alpha)$ ,  $M_{12} = *$ , por isso  $M_{21} = \bar{A}_{\sigma(k)}^T(\alpha) P_{\sigma(k+1)} W_{\sigma(k)}(\alpha)$ , e  $M_{22} = W_{\sigma(k)}^T(\alpha) P_{\sigma(k+1)} W_{\sigma(k)}(\alpha) - \lambda^2 R_w$ . Aplicando o Complemento de Shur na (3.39), é possível obter a (3.40).

$$\begin{bmatrix} P_{\sigma(k)} & * & * & * \\ \bar{A}_{\sigma(k)}(\alpha) P_{\sigma(k+1)} & P_{\sigma(k+1)} & * & * \\ \bar{C}_{\sigma(k)}(\alpha) & 0 & I & * \\ 0 & W_{\sigma(k)}^T(\alpha) P_{\sigma(k+1)} & 0 & \lambda^2 R_w \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.40}$$

Para simplificar, foram adotadas as seguintes substituições em (3.40):  $i = \sigma(k)$ ,  $j = \sigma(k+1)$ ,  $\mu = \lambda^2$ ,  $P_i = \eta S_i^{-1}$  e  $P_j = \eta S_j^{-1}$ . Com base nisso, por inspeção, é possível escrever (3.41).

$$\begin{bmatrix} \eta S_i^{-1} & * & * & * \\ \bar{A}_i(\alpha) \eta S_j^{-1} & \eta S_j^{-1} & * & * \\ \bar{C}_i(\alpha) & 0 & I & * \\ 0 & W_i(\alpha)^T \eta S_j^{-1} & 0 & \mu R_w \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.41}$$

Aplicando o conceito de relaxamento proposto por (CUZZOLA et al., 2002), pode-se assumir a existência de uma matriz invertível  $G$  de ordem apropriada. A desigualdade (3.41)

pode ser multiplicada pela matriz diagonal de blocos  $\mathbb{B} = \text{bdiag}(G_i^T, S_j, \eta, \eta)$ , permitindo a sua reescrita como (3.42).

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & * & * & * \\ G_i \bar{A}_i(\alpha) & S_j & * & * \\ G_i \bar{C}_i(\alpha) & 0 & \eta I & * \\ 0 & \eta W_i(\alpha)^T & 0 & \eta \mu R_w \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.42)$$

Utilizando (3.36) e (3.37) na expressão (3.42) e fazendo a substituição  $X_i = F_i G_i$ , é possível deduzir a LMI (3.31).

Com o intuito de garantir a estabilidade assintótica em malha-fechada para cada instante de amostragem, considere o procedimento de minimização em 3.43, sujeito à restrição 3.44.

$$\min_{P_i, \beta^2} \beta^2 \quad (3.43)$$

$$x(k|k)^T P_i x(k|k) + \lambda^2 w_{\max}^2 \leq \beta^2 \quad (3.44)$$

$$1 - x(k|k)^T S_i^{-1} x(k|k) - \eta^{-1} \mu w_{\max}^2 \geq 0 \quad (3.45)$$

Reorganizando e aplicando o complemento de Schur à desigualdade (3.45), é possível concluir a prova da LMI (3.32).

De acordo com Carvalho et al. (2023), para formular as LMIs (3.33) e (5), as restrições (3.27) e (3.28) devem ser levadas em consideração. Nesse caso, os mesmos procedimentos utilizados por Kothare et al. (1996) e Benallouch et al. (2014) foram adotados, considerando que a norma euclidiana do sinal é menor ou igual ao sinal máximo permitido, expresso da seguinte forma:

$$\max_{k \geq 0} \|u(k)\|_2^2 = \max_{k \geq 0} \|F_i x(k)\|_2^2 \quad (3.46)$$

$$= \max_{k \geq 0} \|X_i G_i^{-1} x(k)\|_2^2 \quad (3.47)$$

$$\leq \max_{x \in \varepsilon} \|X_i G_i^{-1} x\|_2^2 \quad (3.48)$$

$$= \lambda_{\max} \left[ (X_i G_i^{-1})^T S_i^{1/2} S_i^{1/2} (X_i G_i^{-1}) \right] \quad (3.49)$$

Considerando o projeto do sinal de controle dado por  $|u(k)|^2 \leq (u_{\text{lim}}^{z_d})^2$  e o conjunto de elipsóides de fronteira  $\varepsilon$  definido por Kothare et al. (1996), obtém-se (3.50).

$$\left( u_{\text{lim}}^{z_d} \right)^2 - X_i^T (G_i^T S_i^{-1} G_i)^{-1} X_i \geq 0 \quad (3.50)$$

Aplicando o complemento de Schur à desigualdade (3.50), juntamente ao procedimento utilizado por Cuzzola et al. (2002), e assumindo a existência de variáveis semi-definidas positivas, como  $Z_i \leq (u_{\text{lim}}^{z_d})^2$ , onde  $z_d = 1, 2, 3, \dots, m$ , é possível formular (3.33).

Com relação às restrições de estado, supõe-se que a norma dos estados do sistema seja menor ou igual ao sinal máximo permitido, conforme descrito em Benallouch et al. (2014). Os estados do sistema podem ser escritos como está apresentado em (3.51) – (3.54).

$$\|x^{v_d}(k+1)\|_2^2 \leq x_{\text{lim}}^{v_d}, \quad \forall k \geq 0, \quad v_d = 1, 2, \dots, n \quad (3.51)$$

$$\max_{k \geq 0} \|x(k+1)\|_2^2 = \max_{k \geq 0} \left\| \begin{bmatrix} \bar{A}_i(\alpha) & W_i(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (3.52)$$

$$= \max_{x, w \in \varepsilon} \left\| \begin{bmatrix} \bar{A}_i(\alpha) S_i^{-1/2} & W_i(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_i^{1/2} x \\ w \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (3.53)$$

$$= (1 + w_{\text{max}}^2) \left[ (\bar{A}_i(\alpha) S_i)^T S_i^{-1} (\bar{A}_i(\alpha) S_i) + W_i(\alpha)^T W_i(\alpha) \right] \quad (3.54)$$

Considerando que a condição de projeto do sinal de controle é dada por  $|x(k)|_2^2 \leq (x_{\text{lim}}^{v_d})^2$  e  $\varepsilon$  é um conjunto elipsoidal definido em Kothare et al. (1996), a partir do conjunto de equações (3.51) – (3.54), é possível obter (3.55).

$$\left( x_{\text{lim}}^{v_d} \right)^2 - (1 + w_{\text{max}}^2) \left[ (\bar{A}_i S_i)^T S_i^{-1} (\bar{A}_i S_i) + W_i^T W_i \right] \geq 0 \quad (3.55)$$

Aplicando o processo de relaxamento e considerando que  $V_i \leq (x_{\text{lim}}^{v_d})^2$ , quando  $v_d = 1, 2, 3, \dots, n$ , e configuração  $X_i = F_i G_i$  and  $\omega_{\max} = 1 + w_{\max}^2$  para aplicar o complemento de Schur, é possível concluir a prova do LMI (5) e completar o teorema.

### 3.4 Desigualdade de Lyapunov–Metzler

Inicialmente, considere um sistema linear autônomo, contínuo ou discreto, sujeito a comutação, como definido pela equação (3.56).

$$\Delta[\dot{x}] = A_{\sigma(\cdot)} \Delta[x], \quad x(0) = x_0. \quad (3.56)$$

Na expressão (3.56),  $\Delta[x] \in \mathbb{R}^n$  são os estados do sistema,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é a condição inicial,  $\sigma(\cdot)$  é a regra de comutação que a cada instante de tempo seleciona uma das matrizes de estado  $A_{\sigma(\cdot)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dentre aquelas pertencentes ao conjunto  $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_N\}$ .

Conforme Geromel e Colaneri (2006a, 2006b), a estabilidade assintótica do sistema (3.56) pode ser obtida ao considerar a seguinte função de Lyapunov quadrática por partes.

$$V(x) := \min_{i=1, 2, \dots, N} x^T Q_i x = \min_{\psi \in \Psi} \left( \sum_{i=1}^N \psi_i x^T Q_i x \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (3.57)$$

Sendo  $Q_i$  correspondente as matrizes de estabilidade dos  $N$  subsistemas disponíveis para chaveamento e os escalares  $\psi_i$  contidos no conjunto convexo definidos por (3.58).

$$\Psi := \left\{ \psi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \psi_i = 1, \psi_i \geq 0 \right\} \quad (3.58)$$

Entretanto, percebe-se que (3.57) não é diferenciável para todo  $\Delta[x] \in \mathbb{R}^n$ , como pode ser verificada em detalhes em Deaecto e Geromel (2018). Com o intuito de contornar tal problema Geromel e Colaneri (2006a, 2006b) consideram a existência de uma classe de matrizes denominadas de matrizes de Metzler, denotadas por  $\mathcal{M}$  e definidas em (3.59), cujos elementos da diagonal principal são não-positivos para formular os Teoremas 6 e 7.

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{array}{l} \pi_{ji} \geq 0, \quad i \neq j \\ \sum_{i=1}^N \pi_{ji} = 0, \quad \forall i, j \end{array} \right. \quad (3.59)$$

**Teorema 6** (Geromel e Colaneri (2006a)). *Suponha que exista um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas  $Q_{\sigma(x(t))} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N\}$  e uma matriz  $\Pi \in \mathcal{M}$  que satisfazem a desigualdade de Lyapunov-Metzler*

$$A_i^T Q_i + Q_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} Q_j < 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (3.60)$$

Então a regra de comutação

$$\sigma(x(t)) = \arg \min_{\sigma(x(t))=1, \dots, N} x(t)^T Q_{\sigma(x(t))} x(t) \quad (3.61)$$

Pode levar o sistema  $\dot{x}(t) = A_{\sigma(x(t))} x(t)$  a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

**Prova do Teorema 6.** Ver Geromel e Colaneri (2006a). □

**Teorema 7** (Geromel e Colaneri (2006b)). *Suponha que exista um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas  $Q_{\sigma(x(k))} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N\}$  e uma matriz  $\Pi \in \mathcal{M}$  que satisfazem a desigualdade de Lyapunov-Metzler*

$$A_i^T \left( \sum_{j=1}^N \pi_{ji} Q_j \right) A_i - Q_i < 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (3.62)$$

Então a regra de comutação

$$\sigma(x(k)) = \arg \min_{\sigma(x(k))=1, \dots, N} x(k)^T Q_{\sigma(x(k))} x(k) \quad (3.63)$$

Pode levar o sistema  $x(k+1) = A_{\sigma(x(k))} x(k)$  a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

**Prova do Teorema 7.** Ver Geromel e Colaneri (2006b). □

Os Teoremas 6 e 7 introduzem as desigualdades de Lyapunov–Metzler para os casos contínuo e discreto, respectivamente. Além de definir as regras de chaveamentos, equações (3.61) e (3.63), que em conjunto com a respectiva desigualdade de Lyapunov–Metzler podem conduzir um dado sistema chaveado a estabilidade global assintótica.

No entanto, as desigualdades (3.60) e (3.62) possuem natureza não-convexa ocasionada pelo produto de variáveis  $(\pi_{ji}Q_j)$ . Desta forma, não é possível empregar solvers baseado em programação semidefinida (LMILAB, SDP3 ou SeDuMi, por exemplo) para a solução de problema que as envolvem (DEAECTO; GEROMEL, 2008; DEAECTO; GEROMEL, 2018).

Para solucionar esse problema Geromel e Colaneri (2006a, 2006b), adotam uma postura mais conservadora ao considerar uma subclasse das matrizes de Metzler, onde os elementos da diagonal principal são iguais, i. e.,  $\pi_{ii} = \eta$  onde  $(1 - \eta)^{-1} \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} = 1$  e, portanto, formular os Corolários 1 e 2.

**Corolário 1** (Geromel e Colaneri (2006a)). *Suponha que existe um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas  $Q_{\sigma(x(t))} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N\}$  e um escalar positivo  $\eta$  que satisfazem a desigualdade de Lyapunov-Metzler modificada*

$$A_i^T Q_i + Q_i A_i + \eta (Q_j - Q_i) < 0, \quad i \neq j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (3.64)$$

*Então a regra de comutação*

$$\sigma(x(t)) = \arg \min_{\sigma(x(t))=1, \dots, N} x(t)^T Q_{\sigma(x(t))} x(t) \quad (3.65)$$

*Pode levar o sistema  $\dot{x}(t) = A_{\sigma(x(t))} x(t)$  a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.*

**Prova do Corolário 1.** *Ver Geromel e Colaneri (2006a).* □

**Corolário 2** (Geromel e Colaneri (2006b)). *Suponha que existe um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas  $Q_{\sigma(x(k))} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N\}$  e um escalar positivo  $\eta$  que satisfazem a desigualdade de Lyapunov-Metzler modificada*

$$A_i^T (\eta Q_i + (1 - \eta) Q_j) A_i - Q_i < 0, \quad i \neq j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (3.66)$$

*Então a regra de comutação*

$$\sigma(x(k)) = \arg \min_{\sigma(x(k))=1, \dots, N} x(k)^T Q_{\sigma(x(k))} x(k) \quad (3.67)$$

*Pode levar o sistema  $x(k+1) = A_{\sigma(x(k))}x(k)$  a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.*

**Prova do Corolário 2.** *Ver Geromel e Colaneri (2006b).*

□

Vale salientar, que em ambos os corolários,  $\eta$  é um escalar positivo definido, determinado por uma busca unidimensional ou fixado pelo projetista.

## 4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, o objetivo é demonstrar a eficiência das formulações do SR-MPC via LMI aplicado ao conversor *Boost*, assim como aplicado em sistemas LPV apresentados no Capítulo 3. Serão apresentadas aplicações dessas estratégias em problemas práticos de engenharia

Essa seção encontra-se dividida em duas partes. A primeira parte, que é a seção 4.1 explica o servomecanismo de ação integral usado em (MOREIRA *et al.*, 2021) e (COSTA *et al.*, 2017), e os resultados do SR-MPC no conversor *Boost*. A segunda parte (Seção 4.2) analisará e comparará os resultados obtidos por simulação usando as respostas do SR-MPC-LPV proposto neste estudo com as respostas do *benchmarks*.

A fim de validar a eficiência do controle proposto, será apresentada uma análise comparativa, baseada na resposta no tempo e em índices de desempenho, entre as formulações mencionadas e as metodologias de controle propostas por Benallouch *et al.* (2014), Esfahani e Pieper (2019) e Wada *et al.* (2006), respectivamente, aplicadas a plantas puramente matemáticas.

É importante ressaltar que os índices de desempenho não intrusivos são amplamente difundidos na matemática como uma boa maneira de avaliar a eficiência de ações de controle. Quanto mais próximo de zero for o índice, mais eficiente foi o controle naquele ponto (SHINNERS, 1998; OGATA, 1998; DORF; BISHOP, 1998). Nesta pesquisa, optou-se por utilizar os seguintes índices de desempenho: Índice Integral do Quadrado do Erro (*Integral Square Error - ISE*), Integral do Valor Absoluto do Erro (*Integral Absolute Error - IAE*), Integral do Quadrado do Erro ao longo do Tempo (*Integral of time Multiplied Square Error - ITSE*) e Integral do Valor Absoluto do Erro ao longo do Tempo (*Integral Time-weighted Absolute Error - ITAE*).

É relevante destacar também, que o esquemático do conversor *Boost* utilizado é abordado em Bascope e Barbi (2000) e Costa *et al.* (2017). Além do que, as equações no espaço de estados do conversor operando no Modo de Condução Contínuo (*Continuous Driving Mode - CDM*) podem ser vistas em (MIDDLEBROOK; CUK, 1976) e (REGO *et al.*, 2018). Com isso, o processo de discretização do modelo segue a metodologia adotada em (COSTA, 2017).

### 4.1 SR-MPC via LMI aplicado ao Conversor *Boost* CCTE

O modelo numérico é dividido em dois subsistemas modelados a partir da variação de carga. Ambos usam dois vértices de politopos, nos quais a regra de comutação segue a variação da tensão de entrada. O exemplo numérico segue o estudo de Rego *et al.* (2019).

#### 4.1.1 Servomecanismo de Ação Integral

O diagrama de blocos do servomecanismo de ação integral usado neste estudo, juntamente ao procedimento SR-MPC, é ilustrado na Figura 4 (COSTA *et al.*, 2017). Assim, as expressões do modelo aumentado usado para o projeto do servomecanismo são dadas por:

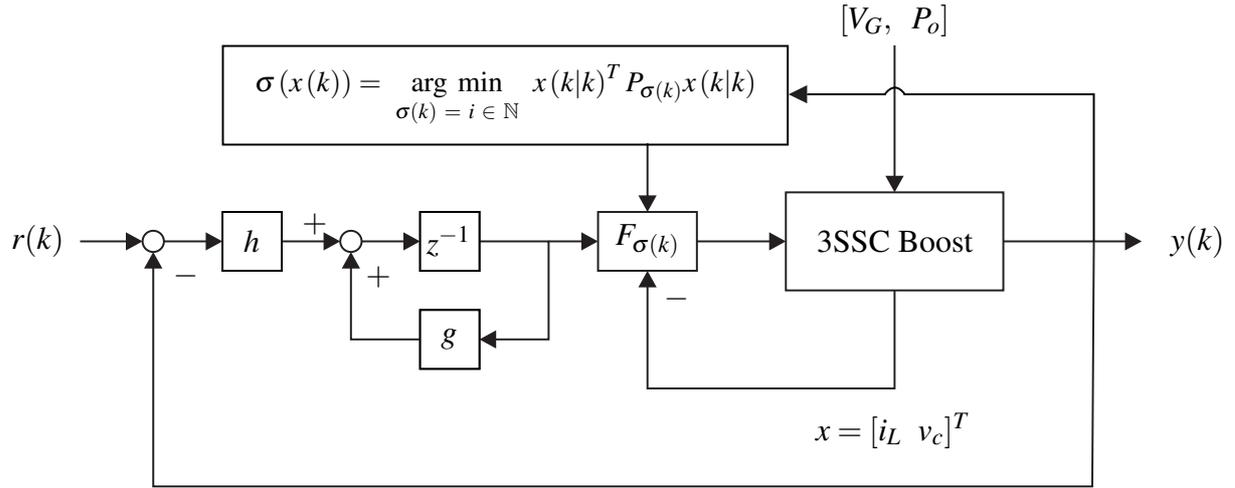


Figura 4 – Diagrama de blocos da ação de controle proposta.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \bar{A}_{\sigma(k)}x(k) + \bar{B}_{\sigma(k)}u(k) \\ y(k) &= \bar{C}_{\sigma(k)}x(k) + \bar{D}_{\sigma(k)}u(k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

no qual,

$$\bar{A}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} & 0 \\ -hC_{\sigma(k)} & g \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} B_{\sigma(k)} \\ -hD_{\sigma(k)} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\bar{C}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} C_{\sigma(k)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} D_{\sigma(k)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

O modelo de malha fechada com ganho comutado  $F_{\sigma(k)} = -[F_{\sigma(k)}^a \quad -F_{\sigma(k)}^b]$  é expresso por:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} - B_{\sigma(k)}F_{\sigma(k)}^a & B_{\sigma(k)} - F_{\sigma(k)}^b \\ -h(C_{\sigma(k)} - D_{\sigma(k)}F_{\sigma(k)}^a) & g - hD_{\sigma(k)}F_{\sigma(k)}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} r(k), \quad (4.4)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} (C_{\sigma(k)} - D_{\sigma(k)}F_{\sigma(k)}) & D_{\sigma(k)}F_{\sigma(k)}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Onde  $(r(k))$  é o *setpoint*,  $(v(k))$  é a ação integral e  $(g)$  e  $(h)$  são os ganhos de grau de liberdade. Esses ganhos são usados para ajuste fino do modelo de resposta em malha-fechada.

#### 4.1.2 Análise dos Resultados do SR - MPC via LMIs Aplicado ao conversor *Boost*

Sabendo que o modelo numérico do conversor Boost é dado por:

*Subsistema – 1.1 – V(36V, 1000W)*

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -0,2838 & -7,7479 \\ 0,0643 & -0,1137 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 580,4780 \\ 65,2800 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0,0198 & 0,9886 \end{bmatrix}, & D_1 &= -0,7304, \end{aligned} \quad (4.6)$$

*Subsistema – 1.2 – V(26V, 1000W)*

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} -0,0958 & -8,4507 \\ 0,0692 & -0,2660 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 851,9920 \\ 53,4470 \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 0,0143 & 0,9886 \end{bmatrix}, & D_2 &= -1,0054, \end{aligned} \quad (4.7)$$

*Subsistema – 2.1 – V(36V, 380W)*

$$\begin{aligned} A_3 &= \begin{bmatrix} -0,3102 & -7,9646 \\ 0,0652 & -0,1119 \end{bmatrix}, & B_3 &= \begin{bmatrix} 542,7340 \\ 68,8140 \end{bmatrix}, \\ C_3 &= \begin{bmatrix} 0,0199 & 0,9956 \end{bmatrix}, & D_3 &= -0,2802, \end{aligned} \quad (4.8)$$

*Subsistema – 2.2 – V(26V, 380W)*

$$\begin{aligned} A_4 &= \begin{bmatrix} -0,0759 & -8,7329 \\ 0,0715 & -0,0287 \end{bmatrix}, & B_4 &= \begin{bmatrix} 814,2740 \\ 58,5880 \end{bmatrix}, \\ C_4 &= \begin{bmatrix} 0,0144 & 0,9956 \end{bmatrix}, & D_4 &= -0,3871, \end{aligned} \quad (4.9)$$

Têm-se que o sistema é dividido em dois subsistemas em que os politopos são baseados na tensão de entrada e a regra de comutação segue de acordo com a variação da carga de saída.

Assim, considerando  $g = 1$ ,  $h = 5$ ,  $R_w = 10I_{1 \times 1}$  e  $\mu = 0,9$ , e  $u_{\max} \leq 0,5$ , para uma simulação de tempo de 300 ms e condição inicial  $x(0) = [38,5 \ 26]^T$ . Para a lei de controle comutada  $u(k) = -F_{\sigma(k)}x(k)$ , o ganho aumentado para os sub-sistemas é:

$$F_{\sigma(1)} = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0,6575 & 0,7760 & 0,3865 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$F_{\sigma(2)} = 1 \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -0,6639 & 0,6150 & 0,3978 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

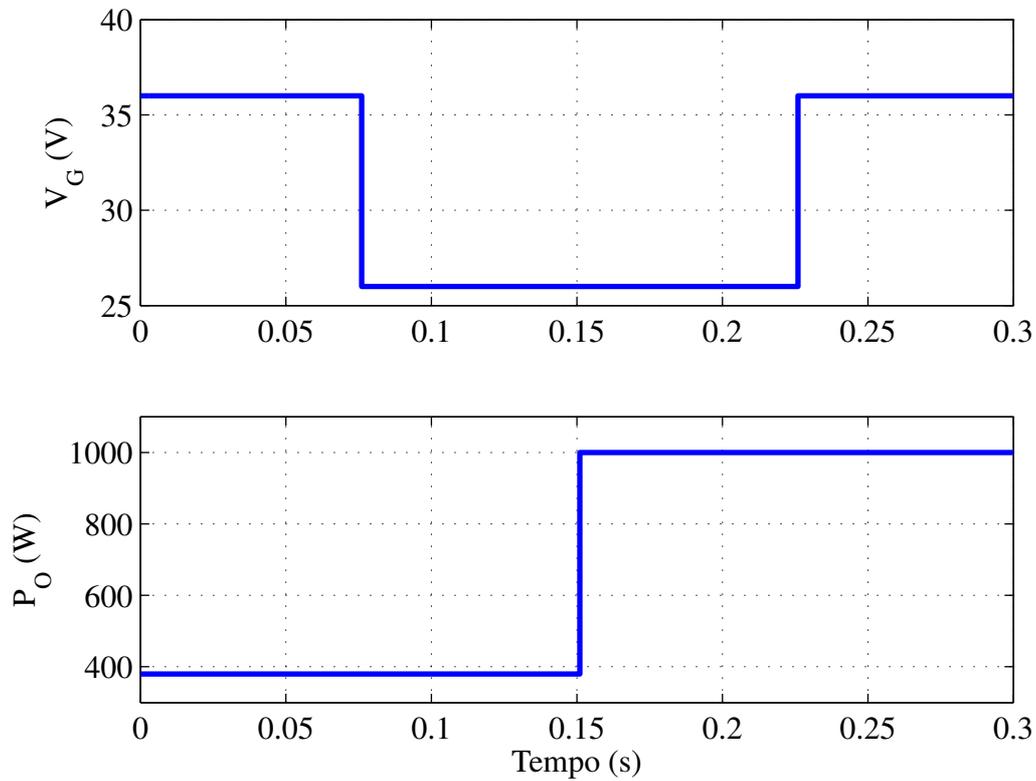


Figura 5 – a) Tensão de entrada ( $V_G$ ) b) Potência de saída ( $P_o$ ).

A figura 5 apresenta as variáveis de perturbação. A primeira curva representa a variação da tensão de entrada  $V_G$ , exibida em (A), e a segunda curva é a potência da carga  $P_o$  apresentada em (B). Ambas as curvas ilustram a perturbação do conversor *boost* modelado usando incerteza politópica e subsistema comutado.

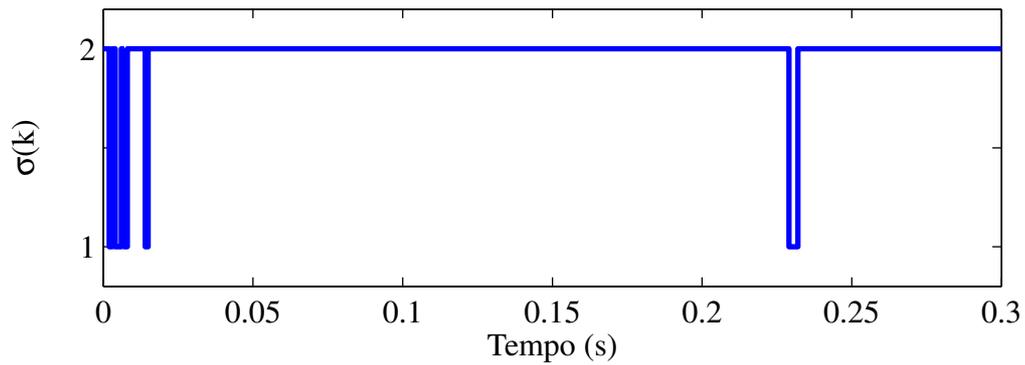


Figura 6 – Sequência de Chaveamento.

Na Figura 6, observa-se que a sequência de chaveamento é determinada na simulação como resultado da regra de chaveamento expressa em (3.13). Além disso, as Figuras 7 e 8 demonstram a estabilização em malha fechada da estratégia SR-MPC proposta. Analisando as Figuras 5 e 6, observa-se que o chaveamento oscilou mais no início e estabilizou durante o resto da simulação, com exceção da segunda mudança de tensão de entrada, na qual houve uma curta variação e estabilizou-se novamente.

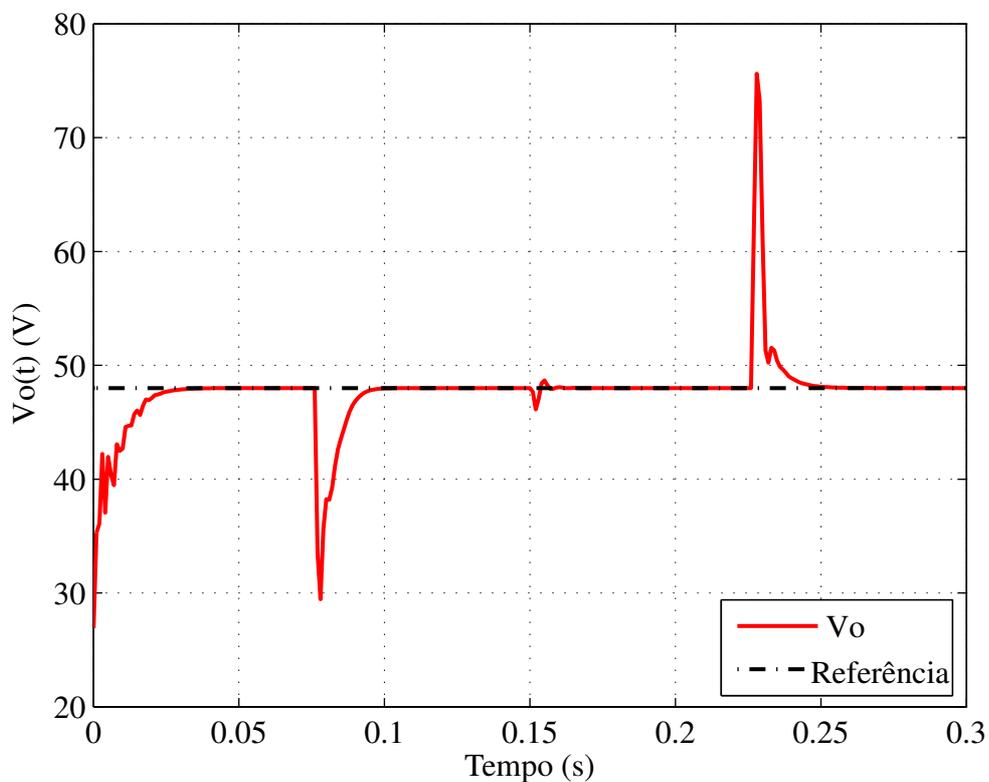


Figura 7 – Tensão de saída ( $V_o$ ).

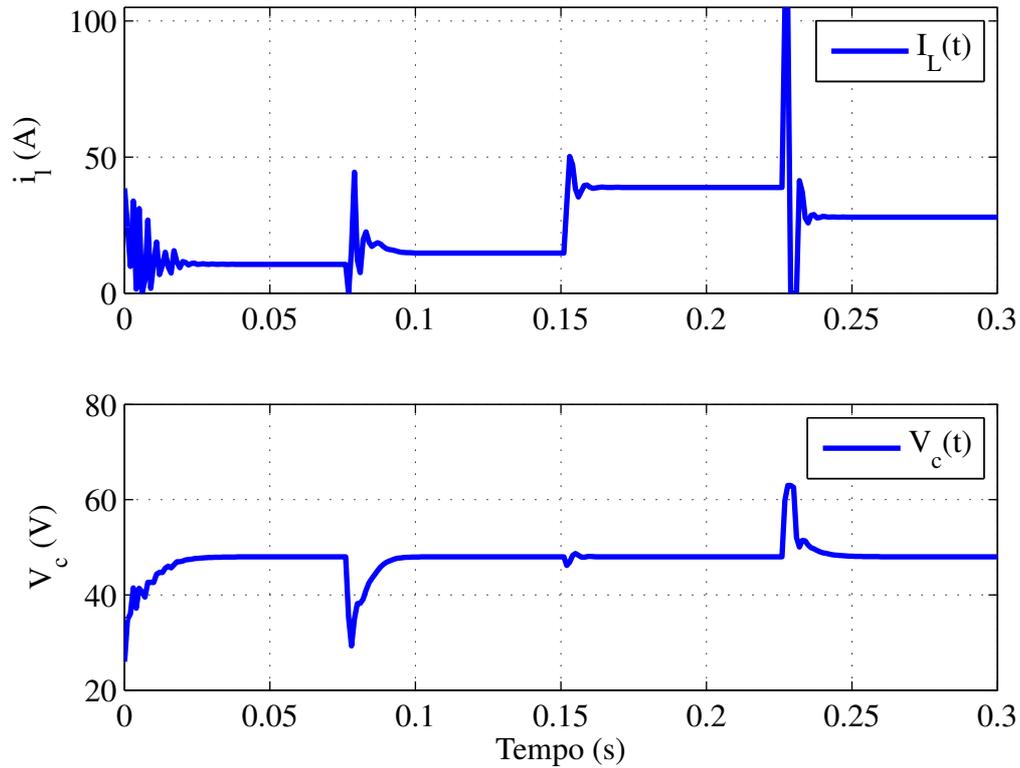


Figura 8 – Resposta dos Estados

Dessa forma, as Figuras 7 e 8 exibem a resposta temporal da corrente no indutor ( $i_L$ ) e da tensão no capacitor ( $V_c$ ). Verifica-se que os estados do modelo aumentado são estáveis em malha-fechada e a regra de comutação mantém seu propósito, conforme ilustrado no diagrama de blocos da Figura 4. Assim, a estratégia de controle proposta teve sucesso ao garantir a estabilidade em malha-fechada da tensão de saída e dos estados, mantendo a estabilidade diante das mudanças nas operações, como visto na Figura 5.

Além disso, o sinal de controle apresentado na Figura 9 demonstrou que o design de comutação proposto garantiu as especificações necessárias considerando  $u_{max} \leq 0,5$  para o modelo de conversor *boost* não linear e conseguiu manter a estabilidade em malha-fechada perante as mudanças de ponto de operação apresentadas na Figura 5.

As elipsoides de fronteira para o projeto SR-MPC são apresentadas na Figura 10. Com base na Seção 3, as elipsoides de fronteira têm como objetivo garantir a estabilidade em malha-fechada para todos os subsistemas, além do que, são úteis para armazenar os ganhos estáveis obtidos em uma tabela de consulta (*Lookup-Table*) (WAN; KOTHARE, 2002).

Para a tipologia *Boost*, a Figura 10 confirma a estabilidade do modelo em malha-fechada

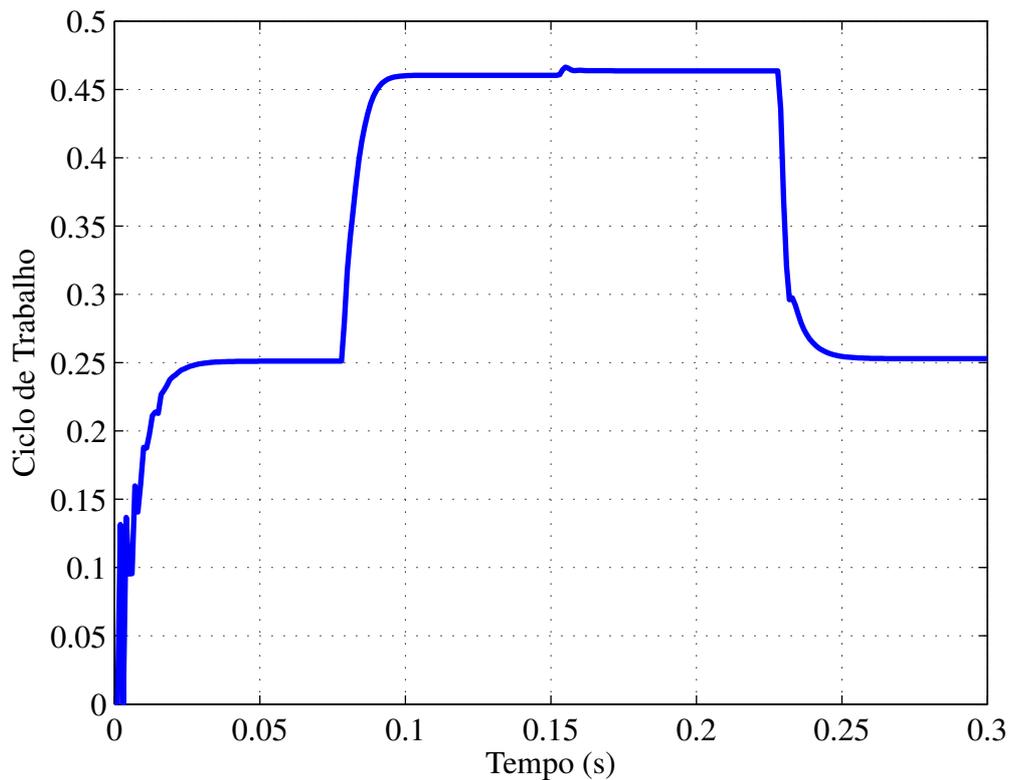


Figura 9 – Sinal de Controle.

e reforça que a trajetória da resposta no tempo está dentro das elipsoides para todos os estados, incluindo o estado de ação integral, onde asseguram a eficiência e a viabilidade do procedimento para a planta do conversor *Boost*.

## 4.2 Análise de resultados do SR-MPC Aplicado a sistemas LPV

Esta seção apresenta e discute os resultados obtidos por meio da implementação das metodologias de controle mencionadas anteriormente. Todos os sistemas abordados neste estudo foram adaptados para garantir as mesmas condições de simulação, considerando o referencial e a metodologia proposta. No entanto, as restrições de entrada e saída não foram consideradas nas simulações.

### 4.2.1 Exemplo I

Esta simulação utiliza o acoplamento de massa-mola - CSM adaptado de Esfahani e Pieper (2019), Kothare *et al.* (1996) e Yu *et al.* (2012), ilustrado na Figura 11. Esta aplicação é amplamente adotada para demonstrar a eficácia das técnicas de controle.

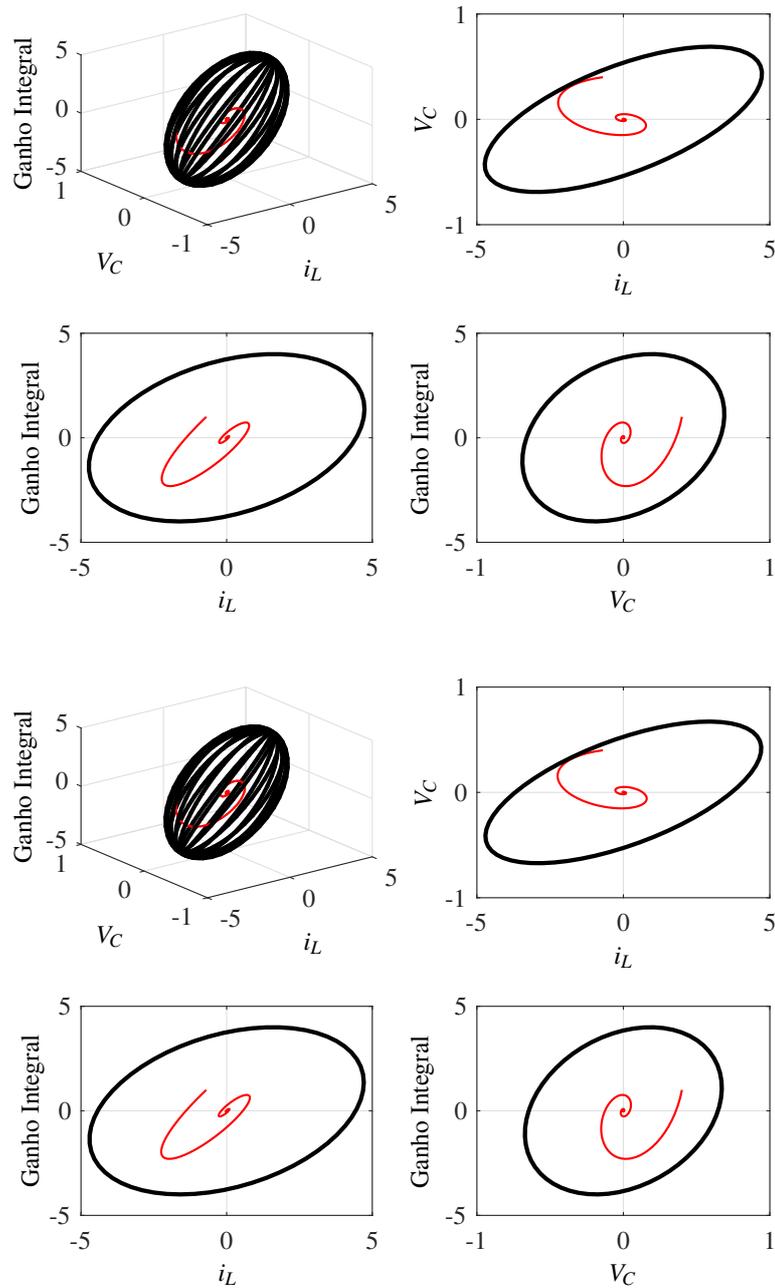


Figura 10 – Elipsoides de Estabilidade.

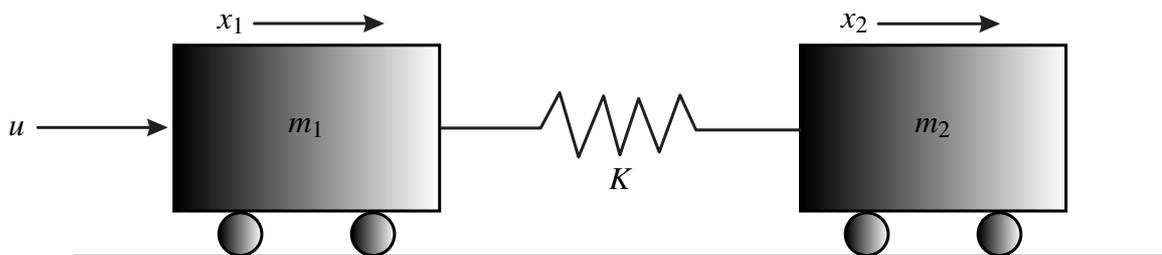


Figura 11 – Sistema CSM, adaptado de Esfahani e Pieper (2019).

A planta simulada é descrita na Figura 11 que consiste em dois blocos de massas diferentes conectados por uma mola. As variáveis  $x_1$  e  $x_2$  são as posições, enquanto  $x_3$  e  $x_4$  representam as velocidades dos respectivos blocos. O objetivo é obter o ganho de realimentação de estado que garanta a estabilidade em malha-fechada do sistema com base em especificações de projeto e desempenho. A constante de amortecimento  $K$  é um parâmetro crítico que varia aleatoriamente. O modelo matemático extraído do *benchmark* é dado por (4.12)–(4.13).

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 \\ -\frac{0,1K}{m_1} & \frac{0,1K}{m_1} & 1 & 0 \\ \frac{0,1K}{m_2} & -\frac{0,1K}{m_2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{0,1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (4.12)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Entendendo a necessidade de garantir que as estratégias de controle operem sob as mesmas condições que a simulação da planta exibida na Figura 11, os parâmetros  $m_1 \in [1,2]$  e  $m_2 \in [1,2]$  são trocados e  $K(\alpha) \in [0,5,\delta]$  é LPV. O modelo utilizado por Wada *et al.* (2006) considerou  $m_1 = m_2 = 1$  e  $K$  como LPV. Assim, aumentou-se a complexidade do sistema para testar a eficiência do controle proposto em comparação com o padrão. Em ambos os casos, o parâmetro da mola varia aleatoriamente entre 0,5 e  $\delta$ . As matrizes CSM do modelo LPV comutado são expressas em (4.14) – (4.15).

$$A(\alpha, \sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 \\ -\frac{0,1K(\alpha)}{m_1(\sigma)} & \frac{0,1K(\alpha)}{m_1(\sigma)} & 1 & 0 \\ \frac{0,1K(\alpha)}{m_2(\sigma)} & -\frac{0,1K(\alpha)}{m_2(\sigma)} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$B(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{0,1}{m_1(\sigma)} \\ 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, D = [0] \quad (4.15)$$

A Figura 12 ilustra a resposta temporal de um sistema de circuito fechado considerando a condição inicial dada por  $\mathbf{x}(0) = [1, 1, 0, 0]$ . As curvas azuis representam o projeto de controle proposto neste estudo, enquanto as curvas vermelhas correspondem ao método de referência apresentado por Wada *et al.* (2006).

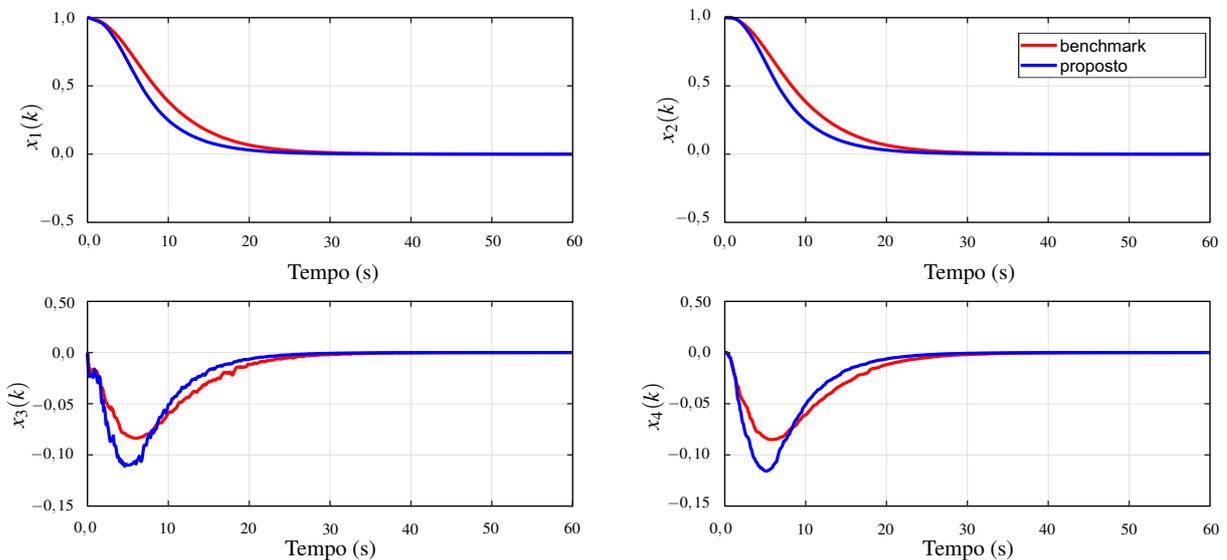


Figura 12 – Estados do Sistema.

Além disso, supondo que  $\mu = 10$ ,  $w_{\max} = 1$ ,  $u_{\max} = 2$ ,  $y_{\max} = 1$  e  $R_w = 10^3 \times I_{1 \times 1}$ , a estratégia de controle proposta garantiu estabilidade em malha fechada com  $\delta = 12$ , mas adotou  $\delta = 10$  para esta simulação. No entanto, uma análise comparativa entre o projeto proposto e o *benchmark* foi realizada usando variação LPV, como mostrado na Figura 13.

A Figura 14, mostra o decaimento das funções objetivo das duas estratégias de controle implementadas.

As curvas na Figura 14 demonstram que a taxa de decaimento do procedimento de otimização de (WADA *et al.*, 2006) é pior do que a do projeto proposto neste estudo. A curva de taxa de decaimento SR-MPC-LPV apresenta um valor inicial mais baixo e uma convergência mais rápida em comparação com o modelo abordado por (WADA *et al.*, 2006). Ainda mais, destaca que a otimização foi baseada em  $\eta$ , com  $\mu$  definido no projeto, evitando o problema de

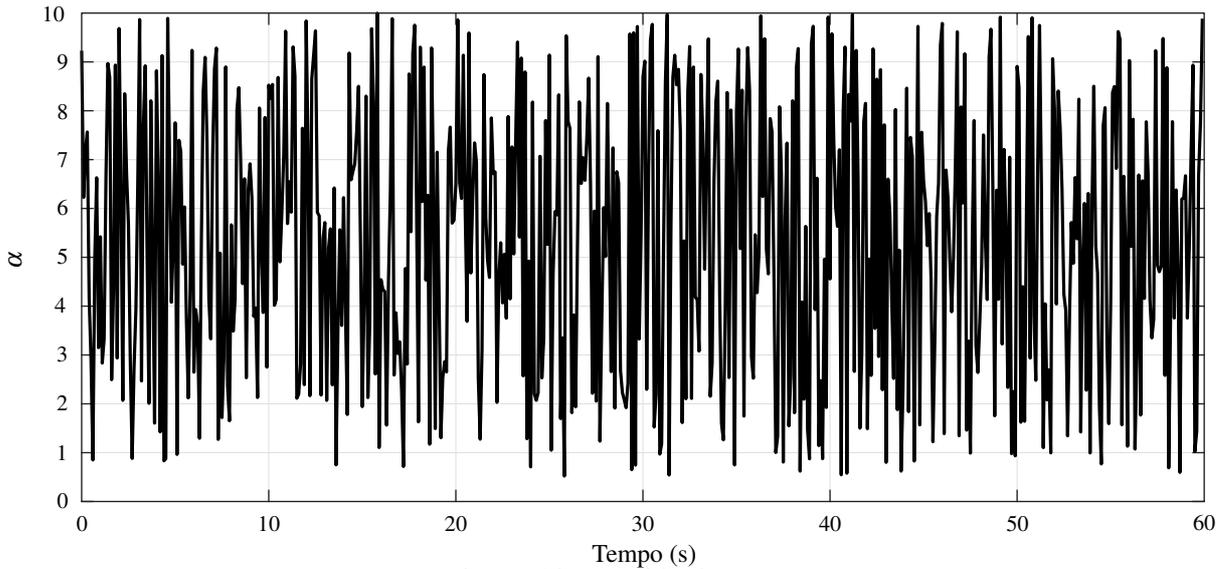


Figura 13 – Variável LPV.

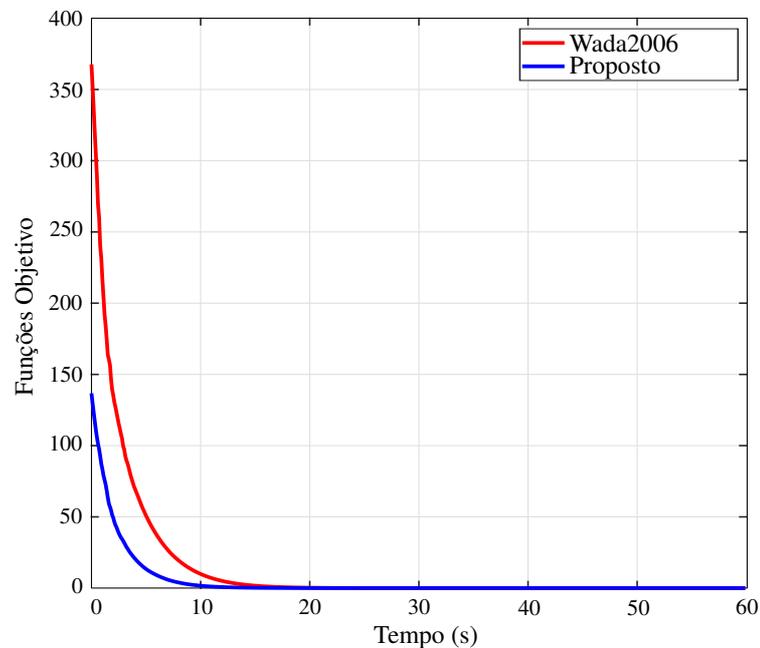


Figura 14 – Curva da taxa de decaimento.

bilinearidade. A Figura 15 apresenta o sinal de controle para ambos os métodos. No mais, a Figura 16 ilustra a regra de comutação da estratégia de controle proposta.

Observando o sinal de controle que é mostrado na Figura 15, a regra de comutação retratada na Figura 16 e o parâmetro LPV aleatório em ambos os modelos são estáveis em malha fechada, conforme mostrado na Figura 13. No entanto, o projeto proposto é mais eficiente na redução de variações LPV do que o projeto de referência, demonstrando que o controle comutado apresentado alcança melhor estabilização em malha fechada da planta. Nota-se também que o controle proposto foi muito mais exigido que o do *benchmark* no intervalo de zero a vinte segundos, porém foi bem mais suave no restante da simulação. Destaca-se ainda que o chaveamento

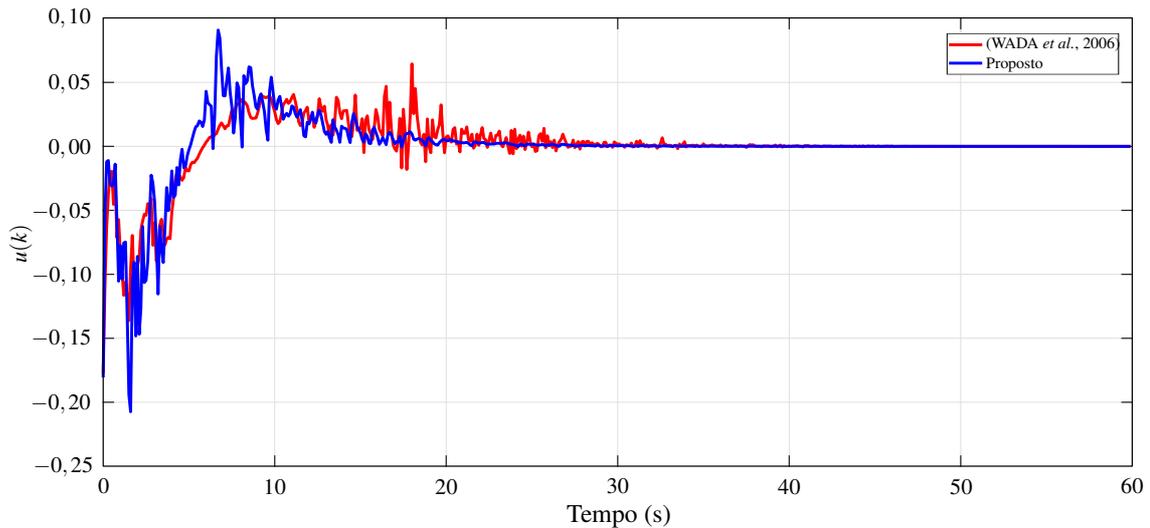


Figura 15 – Sinal de Controle.

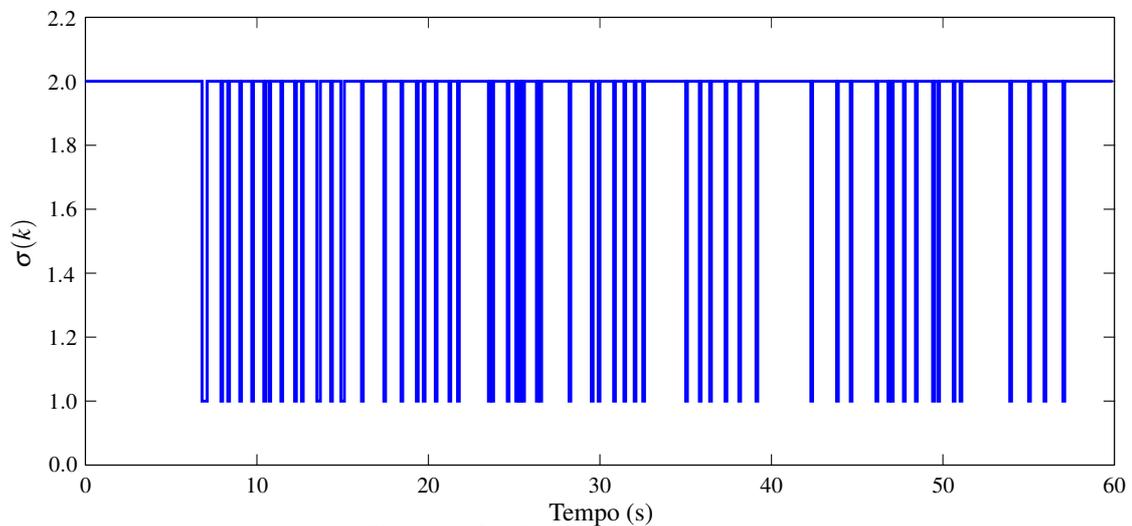


Figura 16 – Regra de Comutação.

do sistema se deu de forma não periódica o que indica que de fato a regra de chaveamento atuou de forma positiva na estabilização da planta.

As elipsoides ilustradas na Figura 17 e 18 correspondem as respectiva matriz de estabilidade obtida com o melhor valor entre os subsistemas  $\sigma(1)$  e  $\sigma(2)$ , no qual,  $\sigma(1)$  é colorido em preto e  $\sigma(2)$  é colorido em verde. Ambas as figuras evidenciam a eficácia do método proposto através da abordagem com comutação, demonstrando a melhor convergência considerando dois modelos LPV comutados juntamente ao controle em malha-fechada.

É importante observar que as elipsoides convergem em direção à origem ao longo do tempo ao considerar o comportamento de resposta temporal dos estados do sistema. A resposta do sistema pode ser analisada usando curvas 2D, representadas por  $x_1 \times x_3$  e  $x_2 \times x_4$ . Já para curvas 3D, a representação é dada por  $x_1 \times x_3$  e  $x_2 \times x_4$ . A estabilização em malha-fechada do projeto SR-MPC LPV para este exemplo é demonstrada nas Figuras 17 e 18 por meio das

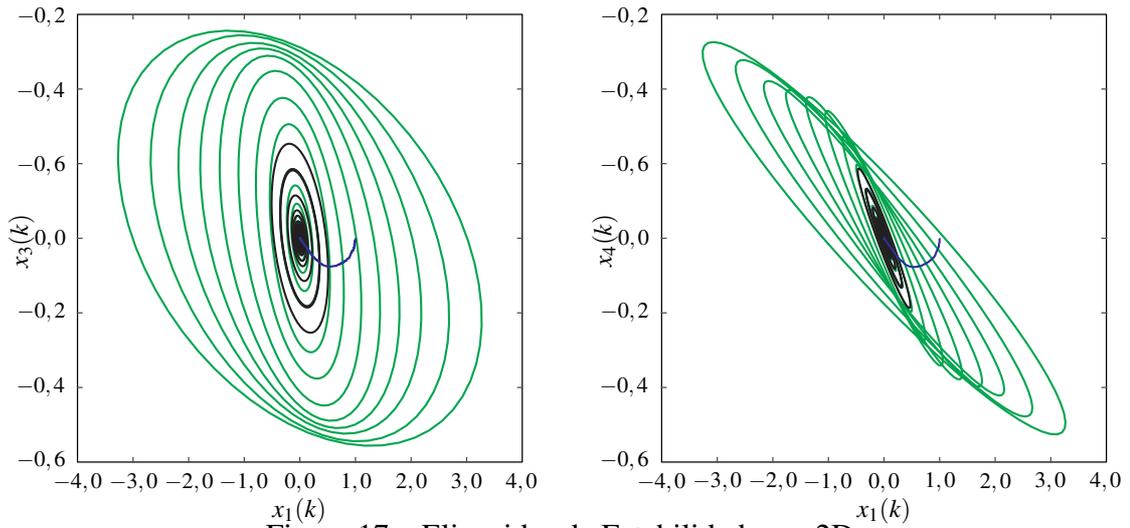


Figura 17 – Elipsoides de Estabilidade em 2D.

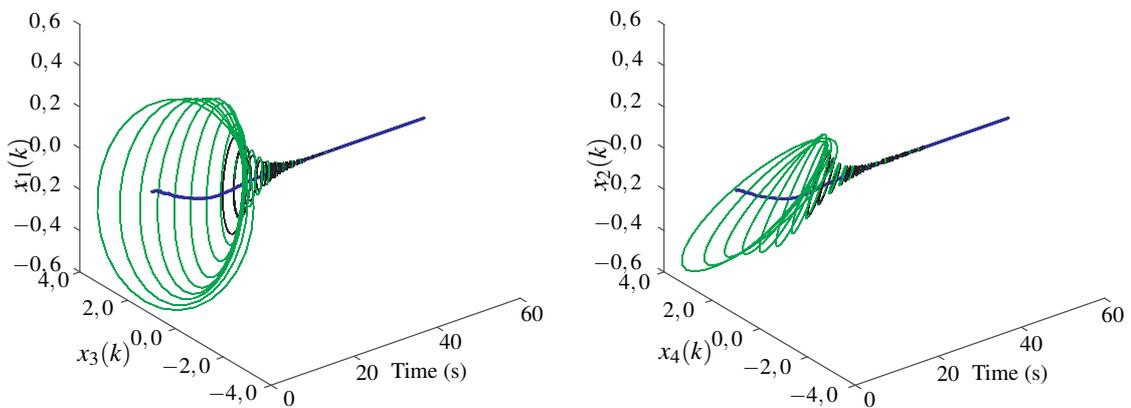


Figura 18 – Elipsoides de estabilidade em 3D.

curvas.

Com o intuito de analisar numericamente a eficiência do projeto proposto em comparação com o *benchmark*, são adotados índices de desempenho abordados por Carvalho *et al.* (2023). A Tabela 2 apresenta os seguintes índices de desempenho: Erro Absoluto Integral (IAE), Erro Quadrático Integral (ISE), Erro Absoluto Ponderado pelo Tempo Integral (ITAE), Erro Quadrático Multiplicado pelo Tempo Integral (ITSE).

Esses índices indicam que um valor menor corresponde a um desempenho do modelo melhor. Observando a Tabela 2, a metodologia proposta (está em azul) mostra maior eficiência do que o *benchmark* (está em vermelho) em todos os índices de desempenho usados neste estudo.

Tabela 2 – Exemplo I: Índices de Desempenho.

	(WADA <i>et al.</i> , 2006)	Proposto	Melhoramento
IAE	21,3229	17,5970	17,47%
ISE	12,8815	10,5336	18,23%
ITAE	150,9448	101,6125	32,68%
ITSE	54,9748	35,8764	34,74%

#### 4.2.2 Exemplo II

O segundo modelo é uma adaptação de estudos realizados por Rego e Costa (2023) e Park *et al.* (2011), expressos em (4.16)–(4.17).

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8720 & -0,0623\alpha \\ 0,0935 & 0,9970 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0935\zeta \\ 0,00478\zeta \end{bmatrix} u(k) \quad (4.16)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0,333 & -1,000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

As matrizes LPV comutadas são expressas pelas equações (4.18) até (4.19), onde  $\zeta$  é o parâmetro comutado e  $\alpha \in [1, \delta]$  é o parâmetro LPV que é abordado para testar a eficácia da metodologia proposta.

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0,8720 & -0,0623\alpha \\ 0,0935 & 0,9970 \end{bmatrix}, B(\sigma) = \begin{bmatrix} 0,0935\sigma \\ 0,00478\sigma \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0,333 \\ -1,000 \end{bmatrix}^T, D = [0] \quad (4.19)$$

Os resultados obtidos seguem o mesmo procedimento utilizado no Exemplo 4.2.1. Primeiramente, o comportamento do estado do sistema em malha fechada será descrito. Também serão apresentadas a variação aleatória do parâmetro LPV, a taxa de decaimento da função objetivo, os sinais de controle e o comutador que foram utilizados. Posteriormente, serão exibidas as elipsóides de estabilidade encontradas e, por fim, a tabela contendo os índices de desempenho não intrusivos utilizados na análise quantitativa da eficiência das metodologias implementadas.

A Figura 19 apresenta a resposta temporal dos estados para o modelo de malha fechada considerando a abordagem proposta e o referencial. Ambas as técnicas consideraram a condição inicial em  $x(0) = [-1, 5, 0, 2]$ .

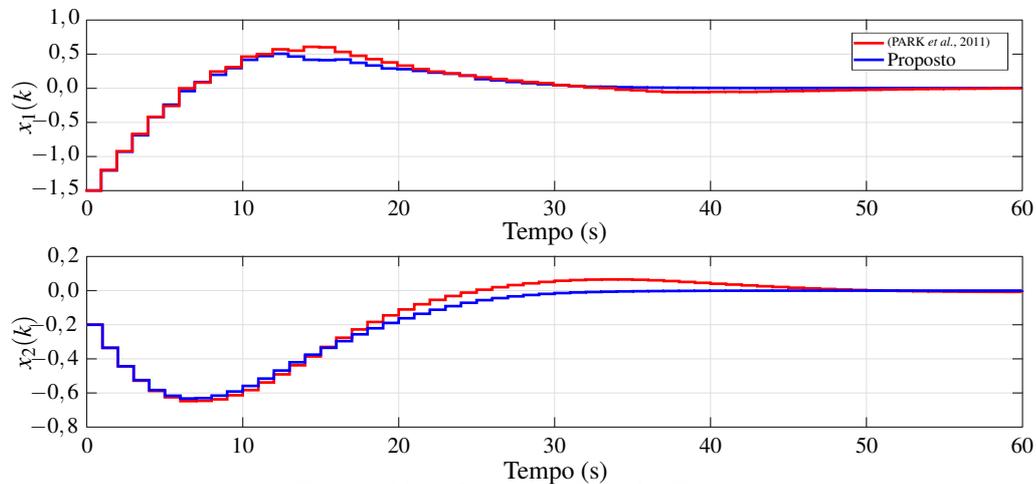


Figura 19 – Resposta Estado-Tempo.

A estratégia de controle desenvolvida por Park *et al.* (2011) é representada pelas curvas vermelhas, enquanto o projeto proposto é representado pelas curvas azuis. Neste modelo, certas suposições são feitas:  $\mu = 1$ ,  $w_{\max} = 1$ ,  $u_{\max} = 1$ ,  $x_{\max} = 1$ , e  $\mathbf{R}_w = 10^3 \times \mathbf{I}_{1 \times 1}$ . A metodologia proposta garante com sucesso estabilidade e viabilidade com um valor  $\delta$  de 12. No entanto, para manter a consistência com o padrão, um valor  $\delta$  de 1 é considerado. É importante notar que os resultados obtidos são influenciados por variações estocásticas no LPV, como ilustrado na Figura 20.

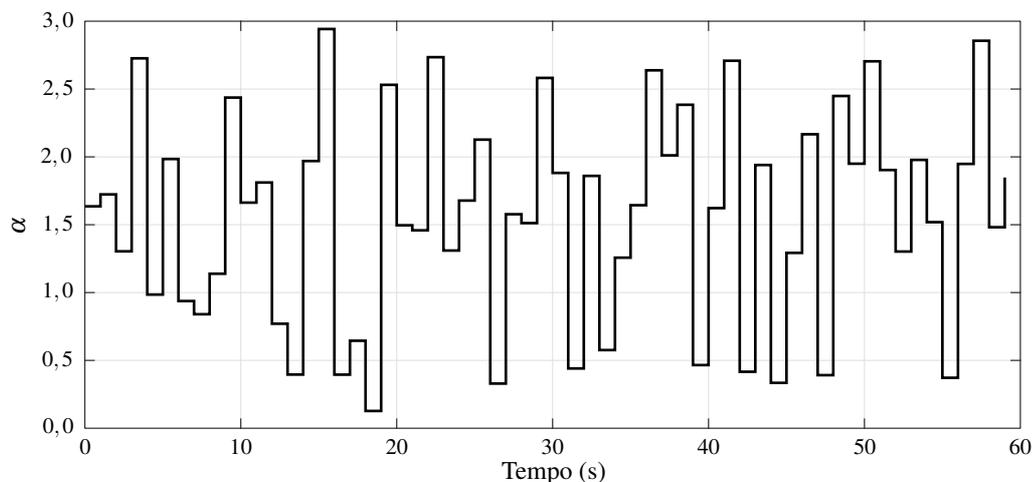


Figura 20 – Variável LPV.

A Figura 21 ilustra a taxa de decaimento da função objetivo para ambos os modelos. Inicialmente, o design proposto apresenta um valor de aceleração mais alto do que o *benchmark*; no

entanto, sua taxa de convergência é mais rápida do que o procedimento utilizado por Park *et al.* (2011).

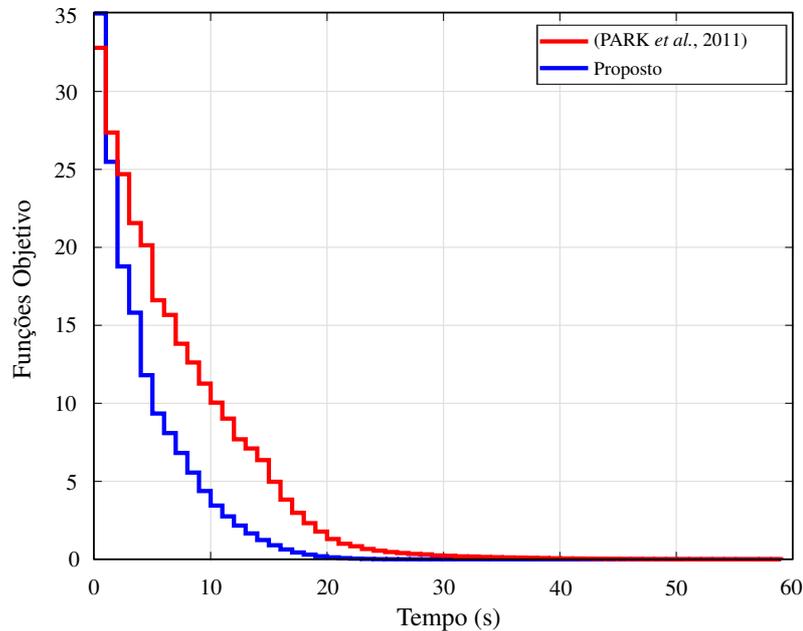


Figura 21 – Convergência da Função Objetivo.

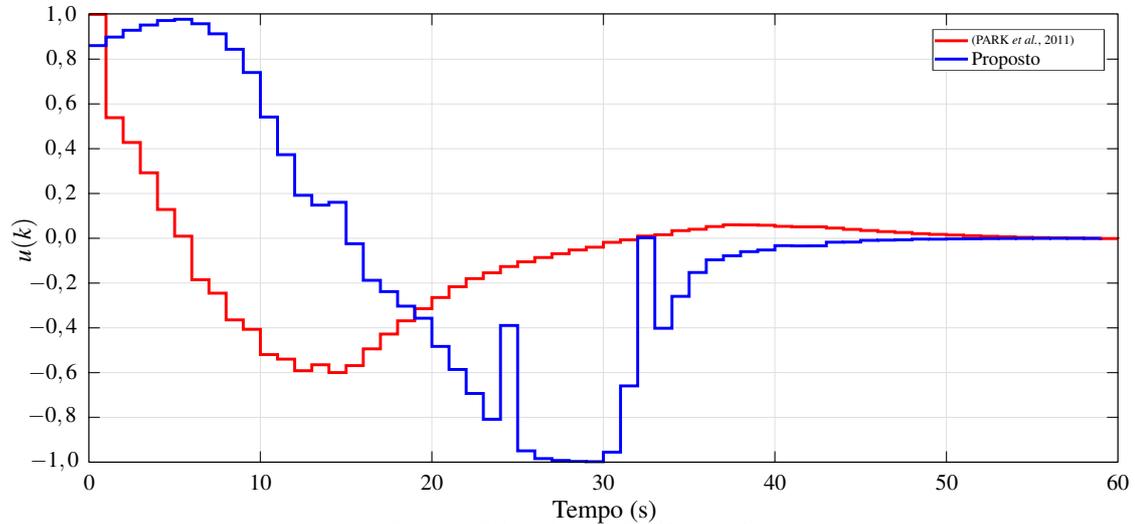


Figura 22 – Sinal de Controle.

Analisando a Figura 21, a função objetivo apresenta valores de *kickstart* semelhantes, ao contrário da Figura 14 mostrada no Exemplo 4.2.1. No entanto, o procedimento proposto converge mais rapidamente do que o do benchmark no Exemplo 4.2.1. Dessa maneira, pode-se notar que a função objetivo da metodologia apresentada é mais rápida em ambos os exemplos, demonstrando a eficiência da técnica de otimização proposta em comparação com os dois *benchmarks* diferentes.

O procedimento de otimização proposto foi definido como uma função de  $\eta$ , com  $\mu$  fixo, com o objetivo de evitar o problema de bilinearidade. A bilinearidade ocorre quando um sistema dinâmico não linear apresenta suas equações de estado ou equações de comportamento, tem uma dependência bilinear em relação às variáveis de estado e/ou às entradas do sistema. Com isso, esses termos que são bilineares podem tornar a análise e o controle do sistema bem mais complexos em comparação com sistemas lineares, porque as propriedades de linearidade não se aplicam diretamente. Já a Figura 22 retrata o sinal de controle de ambas as abordagens. Além disso, a Figura 23 exibe a operação da regra de comutação do projeto proposto. Essas figuras mostram que a regra de comutação proposta resulta em uma melhor estabilização em malha fechada do que o método de referência, apesar das variações aleatórias nos parâmetros LPV mostrados na Figura 20.

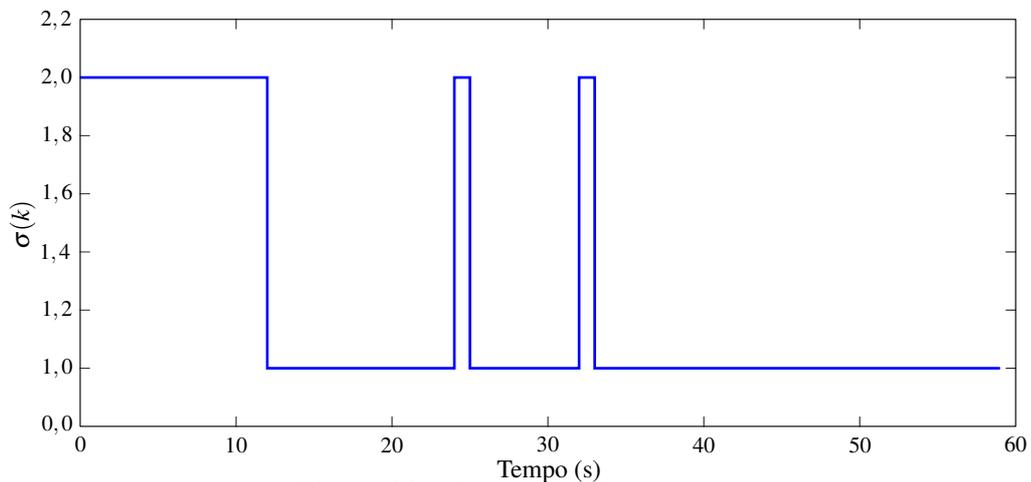


Figura 23 – Regra de Chaveamento.

Analisando as curvas exibidas na Figura 22, verifica-se que o controle proposto, em combinação com a regra de comutação, teve um desempenho melhor do que o *benchmark*. Além disso, a estratégia proposta exigiu mais esforço de controle do que o *benchmark* para garantir a operação estável, mesmo com mudanças nos parâmetros LPV. A Tabela 3 destaca que o método apresentado entregou melhor desempenho utilizando índices IAE, ISE, ITAE e ITSE. Ao considerar esses índices, fica evidente que a estratégia de controle proposta foi mais econômica, exibindo maior capacidade de garantir a estabilidade de malha fechada com perdas mínimas em comparação com o *benchmark*.

As Figuras 24 e 25 mostram os elipsoides de fronteira em 2D e 3D, respectivamente. Os elipsoides preto e verde representam os subsistemas  $\sigma(1)$  e  $\sigma(2)$ , respectivamente. Essas figuras esclarecem a comutação ideal entre os subsistemas em cada etapa de tempo  $k$ . O subsistema

$\sigma(2)$  apresenta melhor desempenho no início da trajetória, enquanto o subsistema  $\sigma(1)$  mantém melhor desempenho no final. Alternando entre esses subsistemas, o melhor desempenho é alcançado, garantindo a estabilização da malha fechada para o exemplo com subsistemas LPV.

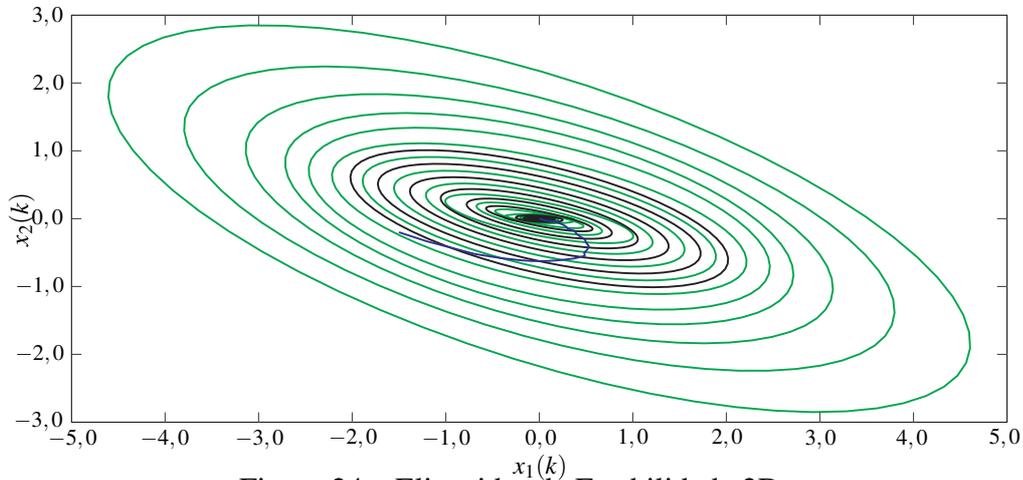


Figura 24 – Elipsóides de Estabilidade 2D.

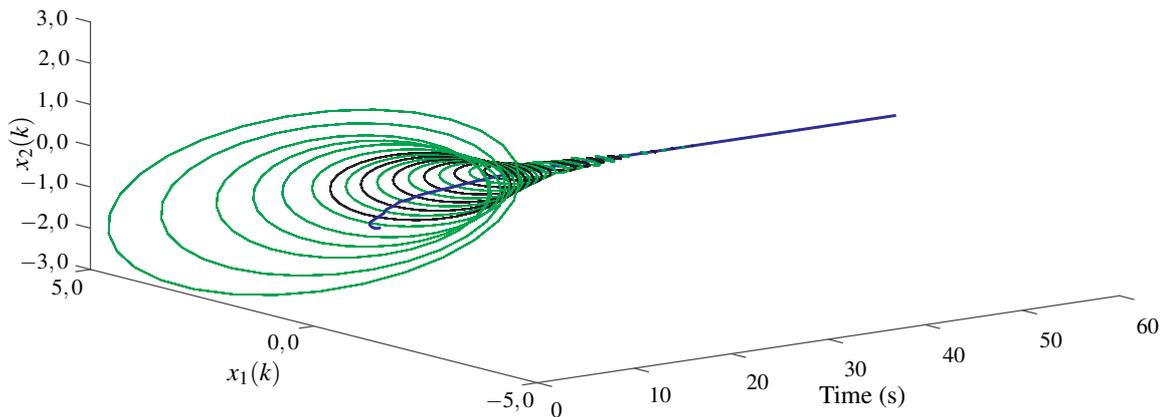


Figura 25 – Elipsóides de Estabilidade 3D.

Diferente do primeiro exemplo numérico, que aborda uma planta de quarta ordem, a referida planta abordada nesta seção é de segunda ordem, o que gera apenas um plano de estados correspondente à interação entre  $x_1$  e  $x_2$ . Analisando as Figuras 24 e 25 conclui-se que as elipsóides convergem para o centro e tendem à origem do plano em regime permanente, atestando a robustez do controle proposto.

Tabela 3 – Exemplo II: Índices de Desempenho

	Park <i>et al.</i> (2011)	Proposto	Melhoramento
IAE	22,7103	19,5896	13,74%
ISE	11,8935	10,7335	9,75%
ITAE	282,4331	190,2255	32,65%
ITSE	92,6167	74,0382	20,06%

## 5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Com base nos resultados apresentados, a metodologia de controle SR-MPC foi eficaz tanto na aplicação a sistemas LPV sendo capaz de resolver problemas LPV utilizando modelos de referência como testes, como quando aplicada ao controle de tensão de saída do conversor *Boost*.

As contribuições destacadas neste estudo do SR-MPC-LPV demonstraram a confirmação do teorema proposto por meio de simulações computacionais. As convergências obtidas nos modelos de referência foram bem-sucedidas utilizando as ferramentas de otimização Yalmip e Sedumi, e a estabilização em malha fechada foi confirmada por meio de elipsóides de fronteira. Além disso, a estratégia de controle SR-MPC-LPV mostrou-se viável e eficaz, obtendo ganhos de estabilização por retroalimentação para sistemas LPV em malha fechada por meio da adoção de uma abordagem de comutação iterativa.

É importante ressaltar que também era objetivo do estudo garantir a estabilidade da planta do Conversor *Boost* considerando as incertezas causadas pelas variações na tensão de entrada e na carga por meio do chaveamento entre dois conjuntos de ganhos de realimentação de estados aplicados ao modelo aumentado da respectiva planta. Ao analisar os resultados da Seção 4, percebe-se que as técnicas de controle propostas na Seção 3, garantem a estabilidade do sistema.

A abordagem apresentada neste estudo supera as fraquezas das técnicas SR-MPC e RMPC-LPV. No Exemplo I, o projeto de controle proposto supera o RMPC-LPV apresentado por Wada *et al.* (2006) para a planta de Kothare *et al.* (1996) com parâmetro LPV e comutação simultânea. No Exemplo II, a técnica proposta alcança a estabilização em malha fechada para o modelo LPV utilizado por Rego e Costa (2023) e Park *et al.* (2011) com projeto comutado, fornecendo resultados melhores em comparação com a abordagem de Park *et al.* (2011). Portanto, a técnica de controle apresentada é eficiente para modelos LPV e parâmetros comutados.

Em relação à análise dos resultados, a estratégia de controle apresentada mostrou um desempenho superior aos benchmarks em todos os cenários, incluindo a resposta temporal da saída e a taxa de decaimento da função objetivo, demonstrando a eficácia do SR-MPC-LPV em comparação com as técnicas RMPC-LPV adotadas por Park *et al.* (2011) e Wada *et al.* (2006).

Assim, a técnica proposta supera as fraquezas do RMPC-LPV por meio da abordagem de comutação, que obtém a melhor condição operacional a partir da teoria de estabilidade de Lyapunov-Metzler associada ao modelo LPV afim. A abordagem proposta alcança o melhor cenário entre diferentes pontos de operação por meio de um procedimento comutado. Isso

é demonstrado nos exemplos de referência por meio da resposta temporal, convergência da função objetivo, elipsóides de fronteira e índices de desempenho.

Para futuras pesquisas, existem oportunidades tanto no campo da modelagem e simulação quanto em aplicações experimentais. No aspecto teórico, é desejável realizar estudos que envolvam a modelagem do controle proposto para sistemas comutados utilizando a linearização LPV. Em termos experimentais, é viável aplicar a metodologia desenvolvida no controle de conversores de potência eletromagnéticos, como os conversores *Buck* e *Boost*.

## REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. **Enciclopédia de automática (vol. 1): controle e automação**. [S.l.]: Blucher, 2007. ISBN 9788521207719.
- APKARIAN, P.; GAHINET, P. A convex characterization of gain-scheduled  $h/\infty$  controllers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 40, n. 5, p. 853–864, maio 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/9.384219>>.
- ARAÚJO, A. C.; MAIA, C. V. M. S.; MARTINS, M. Controle preditivo com garantia de estabilidade aplicado a um conversor boost. In: **Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**. Galoa, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.17648/sbai-2019-111590>>.
- BASCOPE, G.; BARBI, I. Generation of a family of non-isolated DC-DC PWM converters using new three-state switching cells. In: **2000 IEEE 31st Annual Power Electronics Specialists Conference. Conference Proceedings (Cat. No.00CH37018)**. IEEE, 2000. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/pesc.2000.879927>>.
- BENALLOUCH, M.; SCHUTZ, G.; FIORELLI, D.; BOUTAYEB, M.  $H_\infty$  model predictive control for discrete-time switched linear systems with application to drinking water supply network. **Journal of Process Control**, Elsevier BV, v. 24, n. 6, p. 924–938, jun. 2014.
- BOYD, S.; El Ghaoui, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. v. 15. (Studies in Applied Mathematics, v. 15). ISBN 0-89871-334-X.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex optimization**. Cambridge, UK New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN 0521833787.
- BRIAT, C. Introduction to lpv systems. **Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems**, Springer, jan. 2015.
- CAMACHO, E. F. **Model predictive control in the process industry : with 89 figures**. London: Springer London, 1995. ISBN 978-1-4471-3008-6.
- CAMACHO, E. F. **Model predictive control**. Berlin New York: Springer, 1999. ISBN 3-540-76241-8.
- CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. **Robust Model Predictive Control**. [S.l.]: Springer, 2007. ISBN 978-1-85233-694-3.
- CAO, B.; GRAINGER, B. M.; WANG, X.; ZOU, Y.; REED, G. F.; MAO, Z.-H. Direct torque model predictive control of a five-phase permanent magnet synchronous motor. **IEEE Transactions on Power Electronics**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 36, n. 2, p. 2346–2360, fev. 2021.
- CARVALHO, L.; COSTA, M. V.; MACEDO, L. H.; FORTES, E. V. A novel approach for robust model predictive control applied to switched linear systems through state and output feedback. **Journal of the Franklin Institute**, Elsevier BV, v. 360, n. 2, p. 1184–1206, jan. 2023.

CARVALHO, L.; COSTA, M. V. S.; LIMA, W. M.; FORTES, E. V. An off-line output feedback RMPC-LPV applied to an inverted pendulum using relaxed LMI procedures. In: **Anais do Congresso Brasileiro de Automática 2020**. [S.l.]: sbabra, 2020.

CHEN, C. T. **Linear system theory and design**. New York: Oxford University Press, 1999. ISBN 0195117778.

COCKBURN, J. Linear fractional representations of systems with rational uncertainty. In: **Proceedings of the 1998 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.98CH36207)**. [S.l.]: IEEE, 1998.

COSTA, M.; REIS, F.; CAMPOS, J.; NOGUEIRA, F.; ALMEIDA, O. Robust mpc-lmi controller applied to three state switching cell boost converter. **Eletrônica de Potência**, Associação Brasileira de Eletronica de Potencia SOBRAEP, v. 22, n. 1, p. 81–90, mar. 2017.

COSTA, M. V. S. **Controladores Robustos D-LQI e D-Alocação de polos Otimizados via LMI Aplicados a um Conversor Boost Alto Ganho com Célula de Comutação Três Estados**. 122 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará - Centro de Tecnologia, Fortaleza - CE, 2012.

COSTA, M. V. S. **Controle MPC Robusto Aplicado ao Conversor BOOST CCTE Otimizado por Inequações Matriciais Lineares**. 179 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará - Centro de Tecnologia, Fortaleza - CE, 2017.

COSTA, M. V. S.; REIS, F. E. U.; CAMPOS, J.; ALMEIDA, O. M. Lpv gain-scheduling control for a phase-shifted pwm full-bridge soft switched converter. **IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)**, v. 19, p. 6135–6140, 2016.

CUZZOLA, F. A.; GEROMEL, J. C.; MORARI, M. An improved approach for constrained robust model predictive control. **Automatica**, v. 38, n. 7, p. 1183 – 1189, 2002. ISSN 0005-1098.

DEAECTO, G.; GEROMEL, J. Controle de sistemas lineares com comutação. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, v. 19, 12 2008.

DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Stability and performance of discrete-time switched linear systems. **Systems & Control Letters**, Elsevier BV, v. 118, p. 1–7, ago. 2018.

DEUTSCHER, J. A parametric approach to the design of linear time-varying tracking controllers for nonlinear systems. In: **2009 European Control Conference (ECC)**. IEEE, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.23919/ecc.2009.7074610>>.

DEY, S.; TAOUSSER, F. Z.; DJEMAI, M.; DEFOORT, M.; GENNARO, S. D. Observer based leader–follower bipartite consensus with intermittent failures using lyapunov functions and time scale theory. **IEEE Control Systems Letters**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 5, n. 6, p. 1904–1909, dez. 2021.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Modern Control Systems**. [S.l.]: Addison-Wesley; 8th edition, 1998. ISBN 0201308649.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. 12th edition. ed. Rio de Janeiro, Brazil: LTC Editora, 2016.

- EGIDIO, L. N.; DEAECTO, G. S.; JUNGERS, R. M. Stabilization of rank-deficient continuous-time switched affine systems. **Automatica**, Elsevier BV, v. 143, p. 110426, set. 2022.
- ESFAHANI, P. S.; PIEPER, J. K. Robust model predictive control for switched linear systems. **ISA Transactions**, Elsevier BV, v. 89, p. 1–11, jun. 2019.
- FARD, H. J.; SADEGHZADEH, S. M. Predictive control strategy on an the ultra-high gain DC/DC converter suitable for photovoltaic energy conversion system. **Journal of Electrical Engineering**, Walter de Gruyter GmbH, v. 72, n. 6, p. 388–394, dez. 2021.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A.; CHILALI, M. The LMI control toolbox. In: **Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control**. [S.l.]: IEEE, 1994.
- GARCIA, G.; HERNANDEZ, E. Advances in affine l<sub>p</sub>v control: Theory, methods and applications. **Annual Reviews in Control**, v. 45, p. 140–156, 2018.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 45, n. 5, p. 1915–1930, jan. 2006.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of discrete time switched systems. **International Journal of Control**, Informa UK Limited, v. 79, n. 7, p. 719–728, jul. 2006.
- HALL, R. A.; BRIDGEMAN, L. J. Computationally tractable stability criteria for exogenously switched model predictive control. **IEEE Control Systems Letters**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 5, n. 5, p. 1777–1782, nov. 2021.
- KAIRUZ, R. I. V.; ORLOV, Y.; AGUILAR, L. T. Prescribed-time stabilization of controllable planar systems using switched state feedback. **IEEE Control Systems Letters**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 5, n. 6, p. 2048–2053, dez. 2021.
- KAITAO, B.; LV, H.; CHEN, L.; LI, J.; ZHU, Y.; HUANG, W.; FAN, Q. A model predictive controlled bi-directional four quadrant flying capacitor dc/dc converter applied in energy storage system. **IEEE Transactions on Power Electronics**, 2022.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. 3rd. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2002.
- KHAN, S. A.; GUO, Y.; KHAN, M. N. H.; SIWAKOTI, Y.; ZHU, J.; BLAABJERG, F. A novel single source three phase seven-level inverter topology for grid-tied photovoltaic application. In: **2020 IEEE 9th International Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC2020-ECCE Asia)**. [S.l.]: IEEE, 2020. p. 372–376.
- KIANI, E.; GANJI, B.; TAHER, S. A. Model predictive control of switched reluctance generator based on z-source converter for wind power applications. **International Transactions on Electrical Energy Systems**, Wiley, v. 30, n. 11, ago. 2020.
- KIM, T.-H.; LEE, H.-W. Quasi-min-max output-feedback model predictive control for LPV systems with input saturation. **International Journal of Control, Automation and Systems**, Springer Science and Business Media LLC, v. 15, n. 3, p. 1069–1076, maio 2017.
- KOTHARE, M.; BALAKRISHNAN, V.; MORARI, M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. **Automatica**, v. 32, p. 440 – 444 vol.1, 01 1996.

- KU, C.-C.; CHEN, G.-W. Relaxed observer-based controller design method of discrete-time multiplicative noised lpv systems via an extended projective lemma. **International journal of control**, v. 93, n. 3, p. 462–472, 2020. ISSN 0020-7179.
- LI, P.; NGUYEN, A.-T.; DU, H.; WANG, Y.; ZHANG, H. Polytopic LPV approaches for intelligent automotive systems: State of the art and future challenges. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier BV, v. 161, p. 107931, dez. 2021.
- LIBERZON, D. **Switching in Systems and Control**. Birkhäuser Boston, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0017-8>>.
- LIBERZON, D.; HESPANHA, J. P.; MORSE, A. Stability of switched systems: a lie-algebraic condition. **Systems & Control Letters**, Elsevier BV, v. 37, n. 3, p. 117–122, jul. 1999. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0167-6911\(99\)00012-2](https://doi.org/10.1016/s0167-6911(99)00012-2)>.
- LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 54, n. 2, p. 308–322, fev. 2009.
- LIU, X.; ZHANG, Z.; YANG, X.; GARCIA, C.; RODRIGUEZ, J. Fixed switching frequency predictive control for PMSM drives with guaranteed control dynamics. In: **2020 IEEE 9th International Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC2020-ECCE Asia)**. [S.l.]: IEEE, 2020. p. 3033–3038.
- MARCOLINO, M. H.; GALVÃO, R. K. H.; KIENITZ, K. H. Predictive control of linear systems with switched actuators subject to dwell-time constraints. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Springer Science and Business Media LLC, v. 32, n. 1, p. 1–17, nov. 2020.
- MARTINS, R.; SILVA, L. Affine lpv systems: Mathematical framework and applications. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 18, n. 4, p. 923–938, 2020.
- MIDDLEBROOK, R. D.; CUK, S. A general unified approach to modelling switching-converter power stages. In: **1976 IEEE Power Electronics Specialists Conference**. IEEE, 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/pesc.1976.7072895>>.
- MONASTERIOS, P. R. B.; TRODDEN, P. A. Coalitional predictive control: Consensus-based coalition forming with robust regulation. **Automatica**, Elsevier BV, v. 125, p. 109380, mar. 2021.
- MOREIRA, T.; COSTA, M.; NOGUEIRA, F. Output feedback t-s fuzzy rmpe applied to 3ssc boost converter. **Revista IEEE América Latina**, v. 19, p. 1520–1527, 2021.
- MOREIRA, T.; REGO, R.; RIOSY, C.; NOGUEIRA, F.; COSTA, M. Análise comparativa entre controlador gpc-t e mpc-lmi com anti-windup lmi aplicado em conversor boost ccte. In: . [S.l.: s.n.], 2019.
- MÜLLER, M. A.; ALLGÖWER, F. Improving performance in model predictive control: Switching cost functionals under average dwell-time. **Automatica**, Elsevier BV, v. 48, n. 2, p. 402–409, fev. 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.11.005>>.
- NABAIS, M.; LEMOS, J. M. Distributed adaptive predictive control based on switched multiple models and ADMM. In: **Lecture Notes in Electrical Engineering**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2020. p. 253–262.

NAJSON, F. Spectral and convex uniform exponential stability determination in a class of switched linear systems. **IEEE Control Systems Letters**, IEEE, maio 2021.

NIU, Y.; WANG, J.; CAO, Y. A survey on restricted model predictive control and its applications. **Journal of Process Control**, Elsevier, v. 80, p. 1–19, 2019.

OGATA, K. **Discrete-Time Control Systems**. New Jersey: Prentice Hall, 1998. ISBN 0-13-216-102-8.

PACKARD, A.; DOYLE, J. The complex structured singular value. **Automatica**, v. 29, n. 1, p. 71 – 109, 1993. ISSN 0005-1098.

PARK, J.-H.; KIM, T.-H.; SUGIE, T. Output feedback model predictive control for LPV systems based on quasi-min–max algorithm. **Automatica**, Elsevier BV, v. 47, n. 9, p. 2052–2058, set. 2011.

PECCIN, V. B.; LIMA, D. M.; FLESCHE, R. C. C.; NORMEY-RICO, J. E. Fast constrained generalized predictive control with adm embedded in a fpga. **IEEE Latin America Transactions**, v. 18, p. 422–429, 2019.

PREUSS, V. H. B. **Estudo e Aplicação de um Controlador Preditivo Robusto com Estimção Recursiva do Politopo de Incerteza**. 85 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville - SC, 2016.

REGO, R.; COSTA, M. Output feedback robust control with anti-windup applied to the 3ssc boost converter. **IEEE Latin America Transactions**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 18, n. 05, p. 874–880, maio 2020.

REGO, R.; MOREIRA, T.; NOGUEIRA, F.; COSTA, M. Tube mpc applied to 3ssc boost converter with time-varying parameters disturbance. In: **The 12th Seminar on Power Electronics and Control**. [S.l.: s.n.], 2019. p. 6.

REGO, R. C.; COSTA, M. V. Offline output feedback robust anti-windup MPC-LPV using relaxed LMI optimization. **European Journal of Control**, Elsevier BV, v. 69, p. 100719, jan. 2023.

REGO, R. C.; COSTA, M. V. S. Controle preditivo baseado em modelo com retroalimentação aplicado no conversor boost com incertezas. In: **sbai2019**. Ouro Preto, MG: [s.n.], 2019.

REGO, R. C. B. **Controle MPC Robusto Com ANTI-WINDUP aplicado a sistemas LPV e LTV Baseado no Algoritmo QUASI-MIN-MAX Com Relaxação em LMIs**. 98 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró - RN, 2019.

REGO, R. C. B.; COSTA, M. V. S.; REIS, F. E. U.; BASCOPÉ, R. P. T. Análise e simulação do controlador mpc-aw-lmi aplicado ao conversor cete operando em condições de saturação no sinal de controle. In: **XXII Congresso Brasileiro de Automática**. [S.l.: s.n.], 2018.

SARWAR, S.; ASLAM, S.; HAIDER, F.; REHMAN, F. U.; KHAYAM, A.; HANNAN, S. Computational comparison between MPC and SR-MPC for fast dynamic system in presence of hard constraints. In: **2019 4th International Conference on Emerging Trends in Engineering, Sciences and Technology (ICEEST)**. [S.l.]: IEEE, 2019.

SHINNERS, S. **Modern Control System Theory and Design**. [S.l.]: Wiley, 1998. (A Wiley interscience publication). ISBN 9780471249061.

SKAFIDAS, E.; EVANS, R. J.; SAVKIN, A. V.; PETERSEN, I. R. Stability results for switched controller systems. **Automatica**, Elsevier BV, v. 35, n. 4, p. 553–564, abr. 1999. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0005-1098\(98\)00167-8](https://doi.org/10.1016/s0005-1098(98)00167-8)>.

SMITH, J.; JOHNSON, A. Affine l<sub>p</sub>v systems: Applications in industrial process control. **Control Engineering Practice**, v. 29, p. 135–147, 2019.

SOPASAKIS, P.; PATRINOS, P. Convex relaxations for robust stability analysis of time-delay systems with parametric uncertainty. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 66, n. 1, p. 369–376, 2021.

SU, Y.; TAN, K. K. Comments on “output feedback model predictive control for LPV systems based on quasi-min–max algorithm”. **Automatica**, Elsevier BV, v. 48, n. 9, p. 2385, set. 2012.

WADA, N.; SAEKI, M. Anti-windup synthesis for a model predictive control system. **IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering**, Wiley, v. 11, n. 6, p. 776–785, ago. 2016.

WADA, N.; SAITO, K.; SAEKI, M. Model predictive control for linear parameter varying systems using parameter dependent lyapunov function. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 53, n. 12, p. 1446–1450, dez. 2006.

WAN, Z.; KOTHARE, M. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. **Automatica**, Elsevier Limited, v. 39, n. 5, p. 837–846, 5 2003. ISSN 0005-1098.

WAN, Z.; KOTHARE, M. V. Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities. **Journal of Process Control**, v. 12, n. 7, p. 763 – 774, 2002. ISSN 0959-1524.

WICKS, M.; PELETIES, P.; DECARLO, R. Switched controller synthesis for the quadratic stabilisation of a pair of unstable linear systems. **European Journal of Control**, Elsevier BV, v. 4, n. 2, p. 140–147, jan. 1998. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0947-3580\(98\)70108-6](https://doi.org/10.1016/s0947-3580(98)70108-6)>.

YU, S.; BÖHM, C.; CHEN, H.; ALLGÖWER, F. Model predictive control of constrained LPV systems. **International Journal of Control**, Informa UK Limited, v. 85, n. 6, p. 671–683, jun. 2012.

ZHAO, P.; NAGAMUNE, R. Switching LPV controller design under uncertain scheduling parameters. **Automatica**, Elsevier BV, v. 76, p. 243–250, fev. 2017.