



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

FRANCISCO LUIS DE CARVALHO COSTA

**CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO VIA DESIGUALDADES MATRICIAIS  
LINEARES APLICADO A SISTEMAS DINÂMICOS COM COMUTAÇÃO**

MOSSORÓ - RN

2021

FRANCISCO LUIS DE CARVALHO COSTA

**CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO VIA DESIGUALDADES MATRICIAIS  
LINEARES APLICADO A SISTEMAS DINÂMICOS COM COMUTAÇÃO**

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada ao programa de Mestrado em Engenharia Elétrica da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-graduação da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistemas de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius Silvério Costa

Coorientador: Prof. Dr. Elenilson de Vargas Fortes

MOSSORÓ - RN

2021

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

C331c Carvalho, Luis.  
CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO VIA DESIGUALDADES  
MATRICIAIS LINEARES APLICADO A SISTEMAS DINÂMICOS  
COM COMUTAÇÃO / Luis Carvalho. - 2021.  
96 f. : il.

Orientador: Marcus Vinicius Silvério Costa.  
Coorientador: Elenilson Vargas Fortes.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal  
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em  
Engenharia Elétrica, 2021.

1. Controle Preditivo Robusto Baseado em  
Modelo. 2. Desigualdades Matriciais Lineares. 3.  
Algoritmos Online e Offline. 4. Desigualdade de  
Lyapunov. 5. Sistemas Chaveados. I. Silvério  
Costa, Marcus Vinicius , orient. II. Vargas  
Fortes, Elenilson, co-orient. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade  
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência  
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva  
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

FRANCISCO LUIS DE CARVALHO COSTA

**CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO VIA DESIGUALDADES MATRICIAIS  
LINEARES APLICADO A SISTEMAS DINÂMICOS COM COMUTAÇÃO**

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada ao programa de Mestrado em Engenharia Elétrica da Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-graduação da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito à obtenção do título de mestre em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Sistemas de Controle e Automação.

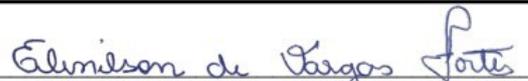
Defendida em: 23 de Novembro de 2021

**BANCA EXAMINADORA**

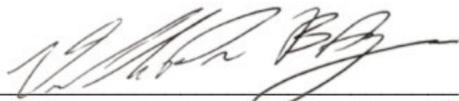
MARCUS VINICIUS  
SILVERIO COSTA:  
02599398380

Assinado digitalmente por MARCUS VINICIUS DE VARGAS FORTES (02599398380)  
DN: CN=MARCUS VINICIUS DE VARGAS FORTES, OU=UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO, O=DICP/UFERSA, C=BR  
Raiz: Eu sou o autor deste documento  
Localidade: Rua Universidade de Aracaju, s/nº  
Data: 2021.11.14 10:52:02-0307  
Full PDF Reader versão: 1.1.1.0

Prof. Dr. Marcus Vinicius Silvério Costa  
Orientador



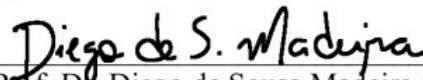
Prof. Dr. Elenilson de Vargas Fortes (IFG)  
Coorientador



Prof. Dr. Victor de Paula Brandão Aguiar  
Membro Interno



Prof. Dr. Adriano Aron Freitas de Moura  
Membro Interno



Prof. Dr. Diego de Sousa Madeira (UFC)  
Membro Externo

*Dedico este trabalho as mulheres da minha vida: Grazielle, minha esposa, e Adelisa, minha mãe, sem as quais eu não estaria onde estou.*

On a cobweb afternoon, in a room full of  
emptiness by a freeway I confess. I was lost in  
the pages of a book full of death, reading how  
we'll die alone and if we're good, we'll lay to  
rest. Anywhere we want to go (...)

(Timothy Commerford, Chris Cornell,

Tom Morello and Brad Wilk)

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a todos aqueles que me inspiraram a buscar uma vida acadêmica, a minha mãe Adelisa Carvalho por me dar forças para seguir sem parar de lutar e a pessoa mais importante de minha vida, Grazielle Tenório por sempre me incentivar a lutar por meus sonhos e me levantar sempre que caí durante esta jornada.

Quero deixar os meus mais sinceros agradecimentos aos professores Dr. Marcus Vinícius Silvério Costa e ao Dr. Elenilson de Vargas Fortes por serem orientadores presentes, pacientes e dedicados. Também, por me passar um vasto conhecimento científico sobre esta área do conhecimento tão fascinante. Gostaria de agradecer a banca avaliadora, pela presença e disponibilidade para avaliar e apresentar sugestões para melhorar o referente trabalho.

Presto aqui minha gratidão também aos amigos que me instruíram e contribuíram para o meu crescimento como discente, ser humano e engenheiro: Dra. Tânia Luna Laura; Dr. Walber Medeiros Lima; Dr. Leonardo H. Macedo; e aos meus colegas de pesquisa Jefferson C. Rezende e Jozias R. L. Neto. Além da Universidade Federal Rural do Semiárido pela oportunidade de formação e desenvolvimento acadêmico.

## RESUMO

Este trabalho propõe a aplicação do controle preditivo robusto baseado em modelo para sistemas lineares discretos sujeitos a comutação mediante incertezas e distúrbios limitados em norma. O controle proposto foi modelado via desigualdades matriciais lineares a partir da desigualdade de Lyapunov e tem por objetivo minimizar o limite superior do índice de desempenho quadrático a um horizonte de predição infinito. A estratégia de controle proposta pode ser implementada nos *designs online* e *offline* e nas configurações de realimentação de estados e saída, sendo esse último associado a um estimador de estados. A fim de atestar a eficiência do modelo proposto, é realizada uma comparação entre os *designs* implementados por meio da análise gráfica da resposta no tempo e de índices de desempenho não intrusivos. Baseado nos resultados, pode-se afirmar que a aplicação do controle proposto foi bem sucedida em ambos os modelos abordados e que o *design offline* se mostrou mais promissor que o *online* para as referidas aplicações.

**Palavras-chave:** Algoritmos Online e Offline. Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo. Desigualdade de Lyapunov. Desigualdades Matriciais Lineares. Sistemas Chaveados. Realimentação de estados. Realimentação de saída.

## ABSTRACT

This work proposes the application of robust model predictive control for discrete linear systems subject to switching under uncertainty and induced norm bounded disturbances. The proposed control was modeled via linear matrix inequalities from Lyapunov inequality and aims to minimize the upper bound of the quadratic performance index to a horizon of infinite prediction. The proposed control strategy can be implemented in the online and offline designs and in the state feedback and output feedback configurations, the latter being associated with a state estimator. To demonstrate the effectiveness of the control strategy, a comparison between the implemented designs is performed through the graphical analysis of the response in time and non-intrusive performance indices. Based on the results, it can be affirmed that the application of the proposed control was successful in both models approached and that the offline design proved to be more promising than the online for these applications.

**Keywords:** Online and Offline Algorithms. Robust Model Predictive Control. Lyapunov inequality. Linear Matrix Inequalities. Switched Systems. Output Feedback. State Feedback.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Artigos abrangendo controle preditivo entre os anos de 1995 e 2020. . . . .	15
Figura 2 – Factibilidade do conjunto solução de uma dada região convexa. . . . .	22
Figura 3 – Factibilidade de um dado conjunto solução relaxado. . . . .	27
Figura 4 – Exemplo de Região Politópica. . . . .	33
Figura 5 – Modelo de Incertezas Fracionárias. . . . .	34
Figura 6 – Sistema Sujeito a Comutação e Incertezas Fracionárias. . . . .	50
Figura 7 – Sequência de Comutação Para o Exemplo I. . . . .	60
Figura 8 – Elipsoides de Estabilidade 2D para os Subistema $\sigma(1)$ e $\sigma(2)$ . . . . .	61
Figura 9 – Elipsoides de Estabilidade 3D para os Subistema $\sigma(1)$ e $\sigma(2)$ . . . . .	61
Figura 10 – Minimização de $\eta$ para $\mu = \sqrt{0,3}$ . . . . .	62
Figura 11 – Comportamento dos Estados via Realimentação de Estados. . . . .	63
Figura 12 – Sinal de Controle para Realimentação de Estados. . . . .	63
Figura 13 – Comportamento dos Estados via Realimentação de Saída. . . . .	64
Figura 14 – Sinal de Controle para Realimentação de Saída. . . . .	64
Figura 15 – Sequência de Comutação Para o Exemplo II. . . . .	66
Figura 16 – Elipsoides de Estabilidade 2D para os Subistema $\sigma(1)$ e $\sigma(2)$ . . . . .	67
Figura 17 – Minimização de $\gamma$ para $\lambda = 0, 1$ . . . . .	68
Figura 18 – Comportamento dos Estados via Realimentação de Estados. . . . .	68
Figura 19 – Sinal de Controle para Realimentação de Estados. . . . .	69
Figura 20 – Comportamento dos Estados via Realimentação de Saída. . . . .	69
Figura 21 – Sinal de Controle para Realimentação de Saída. . . . .	70
Figura 22 – Diagrama Unifilar do SMIB. . . . .	72
Figura 23 – Diagrama de blocos do SS-AVR. . . . .	74
Figura 24 – Polos de malha aberta no plano S. . . . .	76
Figura 25 – Polos de malha aberta no plano Z. . . . .	76
Figura 26 – Sequência de Comutação Para o SMIB-CSM. . . . .	79
Figura 27 – Sinal de Controle Aplicado ao SMIB-CSM. . . . .	79
Figura 28 – Velocidade Angular do Eixo do Gerador. . . . .	79
Figura 29 – Pêndulo Invertido. . . . .	81
Figura 30 – Elipsoides de Estabilidade 2D para os Subistema $\sigma(1)$ . . . . .	83
Figura 31 – Elipsoides de Estabilidade 2D para os Subistema $\sigma(2)$ . . . . .	83

Figura 32 – Comportamento do Pêndulo Invertido via Realimentação de Saída. . . . .	84
Figura 33 – Sequência de Comutação Para o Pêndulo Invertido. . . . .	84
Figura 34 – Sinal de Controle Aplicado ao Pêndulo Invertido. . . . .	85

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Look-up Table obtidos para o Exemplo I. . . . .	61
Tabela 2 – Índices de Desempenhos do Exemplo I. . . . .	65
Tabela 3 – Look-up Table obtidos para o Exemplo II. . . . .	67
Tabela 4 – Índices de Desempenhos do Exemplo II. . . . .	70
Tabela 5 – Parâmetros de Simulação do SMIB-CSM. . . . .	75
Tabela 6 – Parâmetros de Simulação do Pêndulo Invertido. . . . .	81
Tabela 7 – Look-up Table obtidos para o Pêndulo Invertido. . . . .	85

## SUMÁRIO

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	14
2	<b>OBJETIVOS</b>	18
2.1	<b>Objetivo Geral</b>	18
2.2	<b>Objetivos Específicos</b>	18
3	<b>PESQUISA</b>	19
3.1	<b>Publicações</b>	19
3.2	<b>Organização</b>	20
4	<b>DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES</b>	21
4.1	<b>Introdução as LMIs</b>	21
4.2	<b>Definição Matemática</b>	22
4.3	<b>Resolvendo LMIs - Solvers</b>	23
4.4	<b>Complemento de Schur</b>	24
4.5	<b>Estabilidade de Lyapunov</b>	25
4.5.1	Estabilidade de Lyapunov - Caso Contínuo	25
4.5.2	Estabilidade de Lyapunov - Caso Discreto	26
4.6	<b>Desigualdades Matriciais Lineares Relaxadas</b>	27
5	<b>SISTEMAS LINEARES SUJEITOS A COMUTAÇÃO</b>	29
5.1	<b>Desigualdade de Lyapunov–Metzler</b>	30
6	<b>CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO</b>	33
6.1	<b>Modelo de Incertezas Politópicas</b>	33
6.2	<b>Modelo de Incertezas Fracionárias</b>	34
6.3	<b>Realimentação de estados via IH-RMPC LMI</b>	35
6.4	<b>Realimentação de saída via IH-RMPC LMI</b>	38
6.4.1	Observador de Estados	38
6.4.2	Estabilidade Robusta <i>Controlador-Observador</i>	38
7	<b>CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO COMUTADO</b>	40
7.1	<b>SR-MPC via Função de Lyapunov Múltipla</b>	40
7.1.1	Observador de Estados	46
7.1.2	Estabilidade Robusta <i>Controlador-Observador</i>	47
7.2	<b>SR-MPC via Função de Lyapunov–Metzler</b>	49

7.2.1	Observador de Estados . . . . .	55
7.2.2	Estabilidade Robusta <i>Controlador-Observador</i> . . . . .	56
<b>7.3</b>	<b><i>Algoritmos online e offline</i></b> . . . . .	57
<b>8</b>	<b>EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E RESULTADOS</b> . . . . .	59
<b>8.1</b>	<b>Simulações Numéricas</b> . . . . .	59
8.1.1	Exemplo Numérico I . . . . .	60
8.1.2	Exemplo Numérico II . . . . .	65
<b>8.2</b>	<b>Aplicações em Plantas Físicas</b> . . . . .	70
8.2.1	<i>Single Machine Infinite Bus</i> . . . . .	71
8.2.1.1	Modelagem do SMIB-CSM . . . . .	72
8.2.1.2	Parâmetros do SMIB-CSM . . . . .	75
8.2.1.3	Projeto de controle . . . . .	75
8.2.2	Pêndulo Invertido . . . . .	80
8.2.2.1	Modelagem do Pêndulo Invertido . . . . .	80
8.2.2.2	Parâmetros do Pêndulo Invertido . . . . .	81
8.2.2.3	Projeto de controle . . . . .	82
<b>9</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> . . . . .	86
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	87

## 1 INTRODUÇÃO

Segundo Morari e Lee (1999), os primeiros artigos envolvendo controle preditivo só começaram a ser publicados no final da década de 1970. Os modelos iniciais de controle preditivo aplicados a processos industriais foram o *Identification Command* (IDCOM) e o *Dynamic Matrix Control* (DMC) propostos por Richalet *et al.* (1978) e Cutler e Ramaker (1979, 1980). Os primeiros modelos de controlador preditivo generalizado (*Generalized Predictive Control - GPC*) foram idealizados no fim da década de 1980, por Clarke *et al.* (1987a, 1987b).

As primeiras propostas de controle preditivo robusto foram publicadas no início da década de 1990 por Campo e Morari (1987, 1989), Zafiriou (1990) e Genceli e Nikolaou (1993), cujas ações de controle buscavam minimizar uma dada função objetivo e garantir a estabilidade robusta do sistema. No entanto, alguns dos algoritmos propostos na época não proporcionavam robustez ou eram computacionalmente inviáveis (QIN; BADGWELL, 2000).

Neste contexto, o controlador preditivo robusto baseado em modelo (*Model Predictive Control - RMPC*) via desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities - LMIs*) foi proposto por Kothare *et al.* (1996). Tal estratégia de controle consiste em determinar a lei de controle através da minimização do limite superior de um índice de desempenho quadrático a cada instante de amostragem, processo *online*, garantindo estabilidade e robustez de acordo com os critérios de estabilidade de Lyapunov (BOYD; VANDENBERGHE, 2004).

Posteriormente, Wan e Kothare (2002, 2003) apresentaram uma formulação *offline* do RMPC-LMI, possibilitando que processos que exigiam um grande custo computacional pudessem ser controlados usando um conjunto de ganhos estáticos previamente armazenados em uma tabela de ganhos denominada de *Look-Up Table* (LUT) (COSTA, 2017; REGO, 2019).

Nos anos seguintes, essas metodologias de controle adquiriram notoriedade no meio acadêmico e industrial devido a sua praticidade na solução das LMIs por meio de métodos numéricos já existentes na literatura, além de possibilitar a obtenção de leis de controle com garantias de estabilidade (CAMACHO, 1999; FINDEISEN, 2007; CAMACHO; BORDONS, 2007).

A relevância das pesquisas abrangendo RMPC-LMI, tanto *online* quanto *offline*, tem sido refletida no aumento do número de artigos científicos em todas as áreas da engenharia, publicados no decorrer dos anos, como pode ser visto na Figura 1.

Construída a partir da base de dados da *SciVerse Scopus*, a Figura 1 apresenta a evolução das publicações em revistas e congressos de artigos oriundos das pesquisas envolvendo controle preditivo, entre os anos de 1995 e 2020. Observa-se que a partir dos anos de 1996 e 2003,

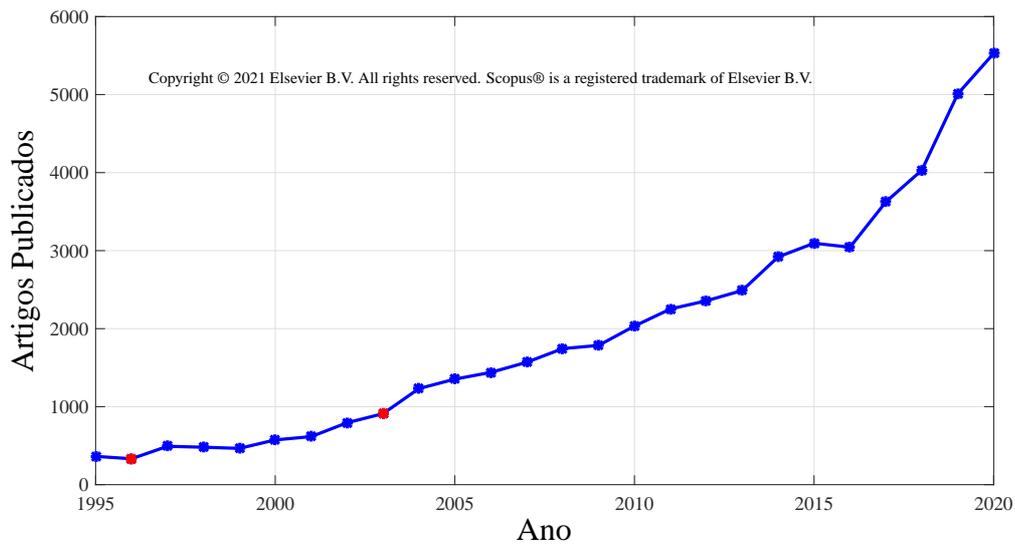


Figura 1 – Artigos abrangendo controle preditivo entre os anos de 1995 e 2020.

destacados em vermelho, o número de publicações apresentou um aumento, coincidindo com as proposta de Kothare *et al.* (1996) e Wan e Kothare (2002, 2003), respectivamente.

Dentre as pesquisas que abordam a metodologia de controle discutida, é possível citar os trabalhos de Kačur *et al.* (2019) que aplicam o controle preditivo ao processo industrial de decomposição do carvão mineral (*Underground coal gasification - UCG*); Wang *et al.* (2019b, 2019c) que simulam o controle via RMPC-LMI do amortecimento horizontal de trens transportando cargas pesadas e Du *et al.* (2020) e Oravec *et al.* (2020) que simulam e implementam, respectivamente, o controle preditivo baseado em modelo aplicado a reatores químicos.

Evidencia-se ainda, os trabalhos de Carvalho *et al.* (2020) e Tian *et al.* (2019) que fazem o controle de posição do pêndulo invertido por intermédio do RMPC via LMIs relaxadas, Rego e Costa (2020) que aplicam o RMPC-LMI associado a um compensador *Anti-Windup* com restrições para o controle do conversor *Boost* com célula de comutação em três estados, além da pesquisa desenvolvida por Pour *et al.* (2021), onde os autores avaliam a aplicação da metodologia proposta por Kothare *et al.* (1996) ao controle de veículos autônomos.

Normalmente, o RMPC-LMI é aplicado a sistemas lentos como as reações químicas da indústria petroquímica, por exemplo, embora também possa ser empregado no controle de plantas com dinâmicas distintas, como sistemas mecânicos e elétricos. Tal versatilidade permite a modelagem de controladores em função de vários tipos de incertezas, além de ser facilmente associado a outras metodologias de controle, possibilitando a síntese de inúmeros modelos híbridos, dentre os quais se destacam as abordagens Fuzzy e Chaveada.

No âmbito do RMPC Fuzzy é possível citar os trabalhos de Babayomi *et al.* (2021), onde os autores propõem um RMPC adaptativo mediante a adoção de uma série de filtros baseados em lógica Fuzzy. Em Zahaf *et al.* (2016) e Wang *et al.* (2019a), os autores realizam a síntese do RMPC a partir da desigualdade de Lyapunov com abordagem Takagi-Sugeno Fuzzy. Por fim, em Dong *et al.* (2020) e Moreira *et al.* (2020) é proposta uma metodologia de controle por realimentação de saída via RMPC Fuzzy baseado na abordagem de Wan e Kothare (2002).

No contexto dos modelos híbridos RMPC Chaveado, é possível citar as pesquisas desenvolvidas por Hall e Bridgeman (2021) e Marcolino *et al.* (2020). No primeiro, os autores desenvolvem um estudo a cerca de comutações randômicas e exógenas no âmbito do controle preditivo chaveado e, no segundo, são explorados a aplicação do RMPC-LMI em conjunto com uma ação de chaveamento entre duas ou mais leis de controle projetadas mediante processos linearizados em função de incertezas estruturadas.

Evidencia-se os trabalhos de Monasterios e Trodden (2021), Liu *et al.* (2020) e Kiani *et al.* (2020). No primeiro trabalho, são discutidos, a viabilidade da implementação do controle preditivo descentralizado a sistemas lineares com comutação. No segundo artigo, é proposto uma abordagem preditiva comutada para o acionamento de motores síncronos com ímã permanente, garantindo uma frequência de chaveamento fixa enquanto preserva a dinâmica do controle preditivo e, na terceira pesquisa, os autores propõem a aplicação do RMPC Chaveado ao controle de geradores em aplicações de energia eólica.

Ainda no âmbito do controle preditivo baseado em modelo aplicados a sistemas lineares sujeitos a comutação, é possível citar os trabalhos de Barzegarkhoo *et al.* (2021) e Sleiman *et al.* (2021). No primeiro artigo, os autores implementam uma técnica de controle preditivo associado a operação de chaveamento entre diferentes topologia de controle. No segundo trabalho, os autores propõem a aplicação de uma metodologia de RMPC chaveado na disposição *online* ao controle de velocidade e posição de robôs.

Por fim, destacam-se as pesquisas de Nabais e Lemos (2020) e Khan *et al.* (2020). No primeiro, é proposta a síntese de um controlador adaptativo baseado em múltiplos subsistemas lineares, onde as leis de controle locais incorporam um algoritmo de predição, enquanto a ação de controle global é determinada por uma regra de chaveamento que depende do sinal de saída e, no segundo, é aplicado um RMPC-LMI comutado a uma nova topologia de inversor trifásico de sete níveis com fonte única para aplicações fotovoltaica conectadas à rede.

Motivado pelas diferentes abordagens de controle preditivo chaveado supracitados, neste trabalho é proposto a síntese de um controlador preditivo robusto baseado em modelo para sistemas lineares discretos sujeitos a comutação. Neste contexto, este controlador será aqui denominado (*Switched Robust Model Predictive Control - SR-MPC*).

A metodologia proposta é uma extensão das estratégias de controle de Kothare *et al.* (1996) e Wan e Kothare (2002, 2003) e da regra de comutação definida por Geromel e Colaneri (2006a, 2006b). Ambos os autores aplicam LMIs e seus artifícios matemáticos para resolver os respectivos problemas de modelagem e otimização.

Atuando em conjunto com uma regra de comutação, o controle proposto busca a minimização do limite superior do índice de desempenho quadrático a um horizonte de predição infinito (*Infinite Horizon - IH*). A estratégia de controle proposta pode ser implementada nos *designs online* e *offline* e nas configurações de realimentação de estados e saída, sendo esse último associado a um estimador de estados.

## 2 OBJETIVOS

Este trabalho tem o objetivo estudar e propor a síntese de controladores preditivos robustos baseados em modelo para sistemas lineares discretos sujeitos a comutação.

### 2.1 Objetivo Geral

A partir das pesquisas realizadas por Kothare *et al.* (1996), Wan e Kothare (2002, 2003), Geromel e Colaneri (2006a, 2006b), Benallouch *et al.* (2014) e Esfahani e Pieper (2019) esta dissertação tem por objetivo à síntese de controladores preditivos robustos baseados em modelo para sistemas lineares discretos sujeitos a comutação e a perturbação exógena via realimentação de estados e saída nos *designs online* e *offline*.

### 2.2 Objetivos Específicos

- A síntese de controladores, por realimentação de estados e saída, preditivos robustos baseados em modelo com abordagem chaveada a partir das pesquisas desenvolvidas por Kothare *et al.* (1996) e Wan e Kothare (2002, 2003);
- Propor o projeto de um observador de estados para sistemas lineares sujeitos a comutação;
- Formular dois métodos iterativos, *online* e *offline*. Ambos os algoritmos devem seguir os princípios das elipsóides de estabilidade invariantes para sistemas chaveados a partir dos conceitos de estabilidade segundo Lyapunov;
- Desenvolver uma análise de estabilidade e robustez do controle usando elipsóides de estabilidade com ênfase no *design offline*, bem como uma análise de estabilidade de entrada e saída do conjunto *Controlador-Observador*;
- Avaliar o desempenho dos controladores propostos mediante: Perturbação exógena; Incertezas fracionárias; Comutação entre subsistemas e da ação de controle. A metodologia de avaliação será realizada por meio de índices de desempenho não intrusivos.

Ademais, vale ressaltar que em Benallouch *et al.* (2014) e Esfahani e Pieper (2019) a síntese dos respectivos controladores consiste em determinar um ganho de realimentação de estados de forma *offline*. Enquanto isso, o modelo proposto tem a vantagem de poder ser implementado nas disposições *online* e *offline* via realimentação de estados ou saída.

### 3 PESQUISA

O foco da pesquisa desenvolvida foi estudar e propor uma estratégia de controle preditivo para sistemas lineares sujeitos a comutação. No entanto, os artigos submetidos e aprovados abrangem outros assuntos como: Sistemas Elétricos de Potência e Meta-heurísticas Bio-inspiradas. Neste contexto, nas seções seguintes são apresentadas a lista de artigos submetidos a revistas e congressos, bem como a organização desta dissertação.

#### 3.1 Publicações

Seguem abaixo os artigos científicos gerados no período de realização desta dissertação de mestrado em engenharia elétrica, cuja linha de pesquisa foi sistemas de controle e automação.

- CARVALHO, L.; COSTA, M. V. S.; LIMA, W. M.; FORTES, E. V. An off–line output feedback RMPC–LPV applied to an inverted pendulum using relaxed LMI procedures. In: **Anais do Congresso Brasileiro de Automática 2020**. [S.l.]: sbabra, 2020. **(Publicado)**
- CARVALHO, L.; REZENDE, J. C.; COSTA, M. V. S.; FORTES, E. V.; MACEDO, L. H. Robust Model Predictive Control via LMIs Applied for Damping Low-Frequency Electromechanical Oscillations in Power Systems. In: **International Conference on Industry Applications 2021**. [S.l.]: Induscon, 2021. **(Publicado)**
- CARVALHO, L.; NETO, J. R. L.; REZENDE, J. C.; COSTA, M. V. S.; FORTES, E. V.; MACEDO, L. H. Linear quadratic regulator design via metaheuristics applied to the damping of low–frequency oscillations in power systems. **ISA Transactions: The Journal of Automation**, p. 20p, 2020. **(Aceito para publicação)**
- CARVALHO, L.; COSTA, M. V. S.; FORTES, E. V.; MACEDO, L. H. A Novel Approach for Robust Model Predictive Control Applied to Switched Linear Systems Through State and Output Feedback. **Journal of the Franklin Institute**, p. 12p, 2021. **(Submetido)**
- CARVALHO, L.; COSTA, M. V. S.; FORTES, E. V.; MACEDO, L. H. Robust Model Predictive Control Applied To Switched Linear Systems With Structured Feedback Uncertainty. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems (JCAE)**, p. 26p, 2021. **(Submetido)**

### 3.2 Organização

Diante do exposto, esta dissertação encontra-se organizada da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** O tema a ser tratado foi introduzido citando trabalhos conduzidos por diferentes pesquisadores ao redor do mundo nos últimos anos, a fim de salientar a relevância da referida linha de pesquisa no meio acadêmico.
- **Capítulo 2:** Foram apresentados os objetivos geral e específicos que motivaram e direcionaram a realização desta pesquisa.
- **Capítulo 3:** Lista os artigos científicos desenvolvidos no decorrer da realização do referido trabalho e a organização desta dissertação.
- **Capítulo 4:** Apresenta e discute os conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento da referente pesquisa, especificamente no que diz respeito aos conceitos e definições matemáticas de desigualdades matriciais lineares, formulação e relaxação destas, estabilidade de Lyapunov, dentre outros.
- **Capítulo 5:** Apresenta a descrição dos sistemas dinâmicos sujeitos a comutação, destacando algumas das suas propriedades e características.
- **Capítulo 6:** Aborda a teoria do controlador preditivo robusto baseado em modelo via desigualdades matriciais lineares nas topologias de realimentação de estados e saída, como apresentado por Kothare *et al.* (1996) e Wan e Kothare (2002, 2003).
- **Capítulo 7:** Propõe a síntese do controlador preditivo robusto baseado em modelo para sistemas lineares discretos sujeitos a comutação.
- **Capítulo 8:** Discute os resultados das simulações numéricas implementadas para atestar a eficiência das técnicas propostas neste trabalho.
- **Capítulo 9:** Apresenta as considerações finais a respeito dos resultados do estudo e as perspectivas para trabalhos futuros.

## 4 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Neste capítulo serão introduzidos conceitos essenciais e definições matemáticas de desigualdades matriciais lineares, bem como os artifícios matemáticos, *softwares* e *solvers* indispensáveis para a solução destas. Além disso, são apresentados os conceitos sobre estabilidade de Lyapunov, formulação e relaxação de LMIs.

### 4.1 Introdução as LMIs

As desigualdades matriciais lineares são abordagens matemáticas amplamente empregadas na teoria de controle, podendo ser aplicadas na identificação, síntese e controle de sistemas Gahinet *et al.* (1994). O interesse por essas técnicas de modelagem se deve, especialmente, ao fato de que várias restrições e especificações de projeto poderem ser dados na forma de LMIs.

Problemas expressos por LMIs podem ser resolvidos de forma eficiente a partir dos algoritmos já existentes na literatura. Além disso, são vários os problemas que possuem múltiplas restrições, que necessitam da análises de soluções na forma matricial, sendo que em muitos casos estas equações se mostram tratáveis quando expressos na forma de LMIs (COSTA, 2012).

Os primeiros estudos a respeito de LMIs datam do início da década de 1890, quando Alexander Lyapunov, matemático russo, publicou um trabalho que trazia a proposta de análise e condições de estabilidade para sistemas de controle. O segundo marco na história ocorreu durante a década de 1940, quando estas foram aplicadas, de forma manual, na obtenção das soluções de problemas de controle real (WANG; BOYD, 2011; BOYD *et al.*, 1994).

No final da década de 1960, constatou-se que a Equação Algébrica de Riccati (*Algebraic Riccati Equation* - ARE) pode ser expressa na forma de LMIs, facilitando a solução de problemas que as envolvem, como o Regulador Linear Quadrático (*Linear Quadratic Regulator* - LQR), por exemplo (OGATA, 2011; DORF; BISHOP, 1998b).

No entanto, foi apenas na década de 1980, com a criação e aperfeiçoamento dos algoritmos de otimização convexa, que o uso das LMIs na área de controle se intensificou. Desde então muitos dos métodos usuais da teoria de controle e sistemas, estão sendo modelados e reformulados como LMIs (AGUIRRE, 2007).

Diante das vantagens que a aplicação de metodologias de modelagem e controle envolvendo LMIs proporcionam para a área de controle, as seções a seguir tratam do embasamento teórico, básico, necessário para a implementação destas, bem como deste trabalho.

## 4.2 Definição Matemática

Segundo Boyd *et al.* (1994), LMIs podem ser formalmente descritas pela definição 4.2.1 e expressa matematicamente tanto pela equação (4.1) quanto pela expressão (4.2), onde os parâmetros,  $x_i \in \mathbb{R}^m$  e  $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , são simétricos e semidefinidos positivos para  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, m$ .

**Definição 4.2.1** *Desigualdades Matriciais Lineares são combinações lineares de matrizes, simétricas com autovalores não negativos, cujas soluções numéricas podem ser obtidas pela minimização de uma dada função objetivo.*

$$F(x) = x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 + \dots + x_m F_m \geq -F_0 \quad (4.1)$$

Ou ainda:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \geq 0 \quad (4.2)$$

Conforme Boyd *et al.* (1994), LMIs são desigualdades afim que representam restrições convexas, portanto existem soluções factíveis para estas, contida em um dado conjunto solução convexo denotado por  $\{x \in \mathbb{R}^m | F(x) \geq 0\}$ , possibilitando o emprego de programação semidefinida para a solução de problemas descritos por LMIs.

Em relação à factibilidade, o conjunto solução de um dado problema de controle formulado a partir de LMIs é considerado factível se, e somente se, forem satisfeitas todas as restrições impostas ao modelo (COSTA, 2012; BOYD *et al.*, 1994). A Figura 2 exemplifica de forma didática o conceito de factibilidade.

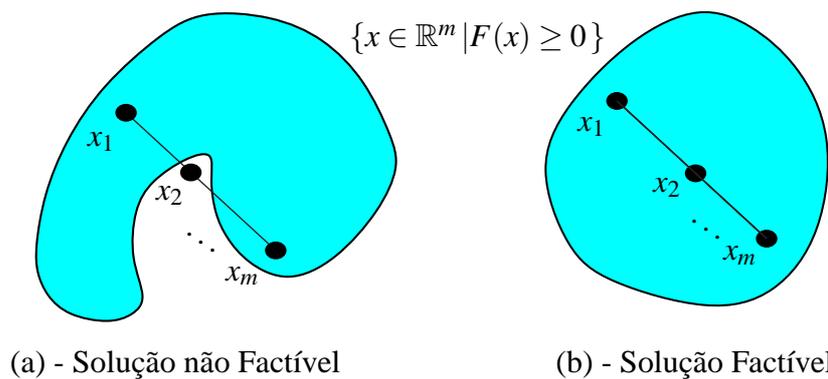


Figura 2 – Factibilidade do conjunto solução de uma dada região convexa.

A Figura 2 - (a) mostra o conjunto solução de um dado problema de controle modelado por LMIs, que apresenta elementos fora da área de restrição, sendo portanto infactível. Todavia, na Figura 2 - (b) todos os elementos do conjunto solução encontram-se no interior da área delimitada pelas restrições sendo por tanto factível (COSTA, 2012).

### 4.3 Resolvendo LMIs - Solvers

Segundo Aguirre (2007), atualmente existe uma extensa família de algoritmos e *solvers* voltados para a resolução de problemas envolvendo programação semidefinida e otimização convexa. A maioria deles são de fácil acesso e de código livre, dentre os quais destacam-se o LMILAB, LMITOOL, LMISol, SDPT3 e SeDuMi. Ambos compatíveis com os *softwares* MATLAB e GNU/OCTAVE, bem como plataformas que usam Fortran, Python, C e C ++.

O LMILAB consiste em uma *Toolbox* nativa do *Software* MATLAB, desenvolvida por Gahinet *et al.* (1994), fundamentado no método numérico proposto por Packard e Doyle (1993) para a solução de LMIs, sendo atualmente um dos *solvers* mais usados, por pesquisadores das áreas que envolvem as mais diversas engenharia para a solução de problemas modelados via desigualdades matriciais lineares (GAHINET; NEMIROVSKI, 1997).

Embora escrito em Fortran e C, o *solver* SDPT3 também é nativo do MATLAB, desenvolvido por Toh *et al.* (1999) é empregado para solução de problemas de programação cônica, mas pode ser uma opção viável para os demais algoritmos apresentados nesta subseção.

O LMITOOL se dedica a solução de problemas envolvendo programação semidefinida baseado nos métodos desenvolvidos por Vandenberghe e Boyd (1996) e Wu *et al.* (1996), disponibilizado gratuitamente pelos autores no *Software* livre SCILAB.

O LMISol é um *software* gratuito voltado exclusivamente para a solução de LMI's, desenvolvidos pelos brasileiros Oliveira, Farias e Geromel em 1997 (AGUIRRE, 2007).

O SeDuMI consiste em um pacote de otimização desenvolvido por Sturm (1999) para realizar a otimização de espaços cônicos simétricos. Sendo compatível com uma série de interfaces que permitem o uso deste, tais como: SeDumi *Interface*, YALMIP, LMI-Lab *translator* e *tklmitool* (COSTA *et al.*, 2017; COSTA, 2012; AGUIRRE, 2007).

Neste trabalho foram utilizados o SeDuMi e o YALMIP para a resolução das LMIs, sendo ambos de código abertos que permitem a elaboração de códigos de forma rápida e eficaz, uma vez que o YALMIP possibilita que problemas envolvendo programação convexa sejam representados de maneira mais natural, tanto no MATLAB, quanto no GNU/OCTAVE, fazendo automaticamente a interface com o SeDuMi (LÖFBERG, 2012; LÖFBERG, 2004).

#### 4.4 Complemento de Schur

Introduzido no meio acadêmico pela primeira vez por Haynsworth (1968), o termo *Complemento de Schur* é uma homenagem a Issai Schur, matemático russo-alemão. Amplamente empregado na solução de problemas que envolvem sistemas de equações diferenciais, sendo uma alternativa a processos de conversão de desigualdades convexas e não lineares em desigualdades matriciais lineares, como a Transformação de congruência e o Lema de Finsler, por exemplo (BRIAT, 2015; RAMOS, 2013; AGUIRRE, 2007).

Este recurso matemático pode ser aplicado tanto em sistemas no domínio do tempo contínuo como no tempo discreto (COSTA *et al.*, 2017). Para tal, considere a matriz quadrada simétrica  $\mathcal{N}$ , particionada em quatro blocos matriciais como definida pela equação (4.3).

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Sendo as submatrizes  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  e  $\mathfrak{D}$  quadradas e não singulares, ou seja,  $\mathfrak{A}^{-1} \neq 0$ ,  $\mathfrak{B}^{-1} \neq 0$ ,  $\mathfrak{C}^{-1} \neq 0$  e  $\mathfrak{D}^{-1} \neq 0$  é possível aplicar o *complemento de Schur* de  $\mathcal{N}$  em relação a  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  e  $\mathfrak{D}$ , como se segue nas equações (4.4)–(4.7), respectivamente (AGUIRRE, 2007).

$$(\mathcal{N}/\mathfrak{A}) = \mathfrak{D} - \mathfrak{C}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} \quad (4.4)$$

$$(\mathcal{N}/\mathfrak{B}) = \mathfrak{C} - \mathfrak{D}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A} \quad (4.5)$$

$$(\mathcal{N}/\mathfrak{C}) = \mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{D} \quad (4.6)$$

$$(\mathcal{N}/\mathfrak{D}) = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{C} \quad (4.7)$$

Consequentemente, se  $\mathcal{N}$  for simétrica ( $\mathfrak{C}^T = \mathfrak{B}$  ou  $\mathfrak{B}^T = \mathfrak{C}$ ) como pode ser melhor observado na equação (4.8), o *complemento de Schur* é determinado como segue nas equações (4.9) e (4.10) (BREZINSKI; ZAGLIA, 2003).

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^T = \begin{bmatrix} \mathfrak{N}_1 & \mathfrak{N}_2^T \\ \mathfrak{N}_2 & \mathfrak{N}_3 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$(\mathcal{N}/\mathfrak{N}_1) = \mathfrak{N}_3 - \mathfrak{N}_2^T \mathfrak{N}_1^{-1} \mathfrak{N}_2 \quad (4.9)$$

$$(\mathcal{N}/\mathfrak{N}_3) = \mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_3^{-1} \mathfrak{N}_2^T \quad (4.10)$$

## 4.5 Estabilidade de Lyapunov

As metodologias de controle fundamentadas no critério de estabilidade de Lyapunov tem dentre outros objetivos, determinar uma função de estado definida positiva, equação de Lyapunov, cuja derivada no tempo é definida negativa (LEITE, 2012; AGUIRRE, 2007).

Para a definição da condição de estabilidade de Lyapunov considere um sistema linear autônomo expresso pela equação (4.11). Onde  $x \in \mathbb{R}^n$  são os estados do sistema,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de estados e o operador  $\Delta[\cdot]$  pode representar tanto  $x(t)$  para o modelo contínuo, quanto  $x(k+1)$  para o modelo discreto (AGUIRRE, 2007; HIMMELBLAU; BISCHOFF, 1968).

$$\Delta[\dot{x}] = A \Delta[x] \quad (4.11)$$

O sistema (4.11), encontra-se em equilíbrio quando  $\Delta[x] \equiv 0$ , ou seja, quando não existirem variações dos estados (COSTA *et al.*, 2017; AGUIRRE, 2007; PERLMUTTER, 1972). Logo, pode-se formular uma função quadrática positiva capaz de atender o critério de estabilidade de Lyapunov, conforme a definição 4.5.1.

**Definição 4.5.1** *Critério de estabilidade de Lyapunov:*

$$V(\Delta[x]) := \Delta[x]^T Q \Delta[x] > 0 \quad (4.12)$$

A matriz de estabilidade denotada por  $Q = Q^T \geq 0$ , onde  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . O sistema é dito globalmente assintoticamente estável quando  $\dot{V}(\Delta[x]) < 0$ .

### 4.5.1 Estabilidade de Lyapunov - Caso Contínuo

Considere o sistema linear invariante no tempo  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ . Segundo Costa (2012) e Aguirre (2007), para determinar sua estabilidade mediante o critério de Lyapunov, aplica-se a definição 4.5.1. Logo é possível formular (4.13) e conseqüentemente (4.14), como segue.

$$\frac{d}{dt}(V(x(t))) = \frac{d}{dt}(x(t)^T Q x(t)) < 0 \quad (4.13)$$

$$\dot{x}(t)^T Q x(t) + x(t)^T Q \dot{x}(t) < 0 \quad (4.14)$$

Substituindo  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  em (4.14), formula-se (4.15).

$$(Ax(t))^T Q x(t) + x(t)^T Q (Ax(t)) < 0 \quad (4.15)$$

Evidenciando  $x(t)^T$  pela esquerda e  $x(t)$  pela direita em (4.15), tem-se a expressão (4.16).

$$x(t)^T (A^T Q + QA) x(t) < 0 \quad (4.16)$$

Generalizando (4.16), expressa-se a desigualdade (4.17) (COSTA, 2012; CHEN, 1999).

$$A^T Q + QA < 0 \quad (4.17)$$

Portanto, dado um sistema linear autônomo em tempo contínuo,  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , a estabilidade segundo o critério de Lyapunov é alcançada quando existe, uma matriz de estabilidade,  $Q = Q^T \geq 0$ , tal que (4.17) seja atendida  $\forall x \neq 0$  e  $\forall t \geq 0$  (COSTA, 2012; AGUIRRE, 2007).

#### 4.5.2 Estabilidade de Lyapunov - Caso Discreto

O procedimento adotado para determinar o critério de estabilidade segundo Lyapunov de um dado sistemas linear e autônomo em tempo discreto,  $x(k+1) = Ax(k)$ , é o mesmo seguido na subseção anterior, para tal aplica-se a definição 4.5.1. Permitindo, dessa forma, formular a desigualdade (4.18) e consequentemente (4.19).

$$\frac{d}{dt} (V(x(k))) = \frac{d}{dt} (x(k)^T Q x(k)) < 0 \quad (4.18)$$

$$\dot{V}(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0 \quad (4.19)$$

Segundo Costa (2017) e Aguirre (2007) é possível reescrever (4.19) como (4.20).

$$x(k+1)^T Q x(k+1) - x(k)^T Q x(k) < 0 \quad (4.20)$$

Substituindo  $x(k+1) = Ax(k)$  em (4.20), formula-se (4.21).

$$(Ax(k))^T Q (Ax(k)) - x(k)^T Q x(k) < 0 \quad (4.21)$$

Evidenciando  $x(k)^T$  e  $x(k)$  em (4.21), é possível escrever (4.22).

$$x(k)^T (A^T Q A - Q) x(k) < 0 \quad (4.22)$$

Assim como para o caso contínuo, generalizando (4.22), expressa-se a desigualdade (4.23).

$$A^T Q A - Q < 0 \quad (4.23)$$

Portanto, dado um sistema linear autônomo discreto,  $x(k+1) = Ax(k)$ , a estabilidade segundo o critério de Lyapunov é alcançada quando existe, uma matriz de estabilidade,  $Q = Q^T \geq 0$ , tal que (4.23) seja atendida  $\forall x \neq 0$  e  $\forall k \geq 0$  (COSTA, 2017; AGUIRRE, 2007).

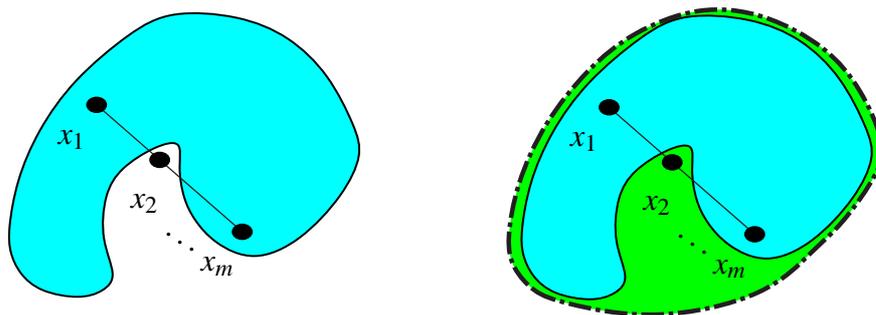
A condição de estabilidade de Lyapunov, para os modelos contínuo ( $A^T Q + QA < 0$ ) e discreto ( $A^T QA - Q < 0$ ) são formas particulares de LMIs. Dessa forma, Lyapunov foi o responsável por utilizar, pela primeira vez, desigualdades matriciais lineares para obtenção de soluções analíticas de estabilidade em sistemas dinâmicos (BOYD *et al.*, 1994).

#### 4.6 Desigualdades Matriciais Lineares Relaxadas

Segundo Costa (2017), muitos dos projetos de controle modelados via LMIs apresentam um alto nível de conservadorismos matemático. Pois, são amplamente empregados no controle de processos complexos que demandam controles robustos e bem definidos mediante certas restrições e modelos de incertezas (REGO, 2019).

Entretanto, quando o sistema é mal condicionado, tais LMIs conservadoras podem não atender às condições de factibilidade do problema ou proporcionar a violação das restrições LMIs durante o processo de otimização, produzindo soluções factíveis, porém fora do espaço convexo (REGO, 2019; COSTA, 2017; CUZZOLA *et al.*, 2002).

Para solucionar o problema de infactibilidade induzidos pelo alto conservadorismo no controle de sistemas mal condicionados via LMIs Cuzzola *et al.* (2002) propôs uma técnica de relaxação das restrições LMIs deixando-as mais flexíveis, se comparadas ao modelo tradicional, possibilitando um aumento da região convexa e consequentemente da área de factibilidade do modelo, como ilustrado na Figura 3 (REGO; COSTA, 2020; COSTA *et al.*, 2017).



(a) - Solução não factível, antes da relaxação (b) - Solução factível, após a relaxação

Figura 3 – Factibilidade de um dado conjunto solução relaxado.

A Figura 3 ilustra de forma didática o processo de relaxação de um dado problema de otimização envolvendo LMIs. Na Figura 3 - (a) observa-se a presença de alguns elementos do conjunto solução fora da região convexa (Conservadora - Azul), ou seja, uma solução infactível. A Figura 3 - (b) mostra o mesmo conjunto solução, no entanto a região convexa foi estendida

(Relaxada - Verde) pela metodologia de relaxação, passando a abrigar todos os elementos do conjunto solução, tornando o modelo factível (REGO, 2019; COSTA, 2012).

A metodologia de relaxação proposta por Cuzzola *et al.* (2002), consiste em admitir a existência de uma matriz  $G$ , invertível, não simétrica, semidefinida positiva e de ordem compatível com a matriz de estabilidade,  $Q = Q^T \geq 0$ , do sistema que se deseja relaxar, sendo possível expressar a inequação (4.24), que descreve a relação entres estas.

$$G > S \implies G - S > 0 \quad (4.24)$$

Sendo  $Q = S^{-1} > 0$  e  $S = S^T \geq 0$ . Multiplicando a matriz de estabilidade à esquerda por  $(S - G)$  e a direita por  $(S - G)^T$  é possível escrever (4.25) e por inspeção (4.27).

$$(S - G)S^{-1}(S - G)^T > 0, \quad (4.25)$$

$$S - G^T - G + GS^{-1}G^T > 0, \quad (4.26)$$

$$GS^{-1}G^T > G + G^T - S \quad (4.27)$$

A expressão (4.27), condição de relaxação, garante a linearidade e convergência do sistema relaxado. Para exemplificar a metodologia desenvolvida por Cuzzola *et al.* (2002), considere a condição de estabilidade de Lyapunov para um sistema discreto via realimentação de estados expressa pela desigualdade (4.28).

$$\bar{A}^T Q \bar{A} - Q < 0 \quad (4.28)$$

Fazendo  $Q = S^{-1} \geq 0$  é possível reescrever (4.28) como (4.29).

$$\bar{A}^T S^{-1} \bar{A} - S^{-1} < 0 \quad (4.29)$$

Rearranjando (4.29), multiplicando a esquerda por  $G^T$  e a direita por  $G$ , formula-se (4.30).

$$G^T S^{-1} G - G^T \bar{A}^T S^{-1} \bar{A} G > 0 \quad (4.30)$$

Aplicando o *complemento de Schur* na desigualdade (4.30) obtém-se (4.31).

$$\begin{bmatrix} G^T S^{-1} G & * \\ \bar{A} G & S \end{bmatrix} > 0 \quad (4.31)$$

Substituindo a condição de relaxação expressa em (4.27) e considerando o sistema realimentado  $\bar{A} = A - BK$  para  $K = YG^{-1}$ , determina-se a condição de estabilidade de Lyapunov relaxada em tempo discreto, expresso pela LMI (4.32).

$$\begin{bmatrix} G + G^T - S & * \\ AG + BY & S \end{bmatrix} > 0 \quad (4.32)$$

## 5 SISTEMAS LINEARES SUJEITOS A COMUTAÇÃO

O estudo de sistemas dinâmicos sempre foi um tópico de grande interesse da literatura científica dessa forma são muitas as abordagens de modelagem e controle propostas ao longo das últimas décadas. Recentemente, as metodologias de controle que mais tem se destacado são aquelas envolvendo a comutação entre subsistemas lineares (LIN; ANTSAKLIS, 2009; LIN; ANTSAKLIS, 2008). Tais metodologias consistem em linearizar os modelos matemáticos dos sistemas para múltiplos pontos de operação de modo que a superposição destes, regidos por eventos discretos, comutação entre os subsistemas, possa descrever a dinâmica do modelo não linear (TEIXEIRA *et al.*, 2003; TEIXEIRA *et al.*, 2000).

O crescente interesse na comutação de subsistemas justifica-se pela sua alta aplicabilidade nas mais distintas áreas do conhecimento, como pode ser verificado, desde os artigos publicados por Kunzler *et al.* (2021) e Egidio *et al.* (2020) na área de eletrônica de potência, aos trabalhos de Dai e Sznaier (2018) e Sznaier (2021) no âmbito da ciência da computação até as pesquisas desenvolvidas na área da medicina por Vargas *et al.* (2010) e Colmegna *et al.* (2021).

Segundo Deaecto e Geromel (2018), ao formular uma dada estratégia de controle para sistemas lineares sujeitos a comutação é necessário uma meticulosa análise matemática durante a modelagem, uma vez que, mesmo que todos os subsistemas que compõem o sistema global sejam estáveis, o modelo pode divergir quando submetido a uma regra de comutação, qualquer. Bem como, uma comutação adequada entre subsistemas instáveis pode conduzir o modelo global a estabilidade assintótica (DAIHA, 2020; EGIDIO; DEAECTO, 2019).

Portanto, verifica-se que durante a comutação, o modelo global pode atuar como o subsistema ao qual foi comutado ou exibir um comportamento inédito não característico de nenhum dos subsistemas que o compõe (DAIHA, 2020; DAIHA; DEAECTO, 2019).

A ação de comutação pode atuar de duas formas distintas, como perturbação exógena dependente do tempo ou chaveamento de controle dependente dos estados ou saída. Esta última pode ser projetada juntamente com a lei de controle com o intuito de estabilizar o sistema mediante a minimização de determinado índice de desempenho (DAIHA; DEAECTO, 2019).

Neste contexto, vale destacar as pesquisas de Geromel e Colaneri (2006a, 2006b), onde fundamentados na desigualdade de Lyapunov–Metzler, os autores buscam determinar as condições de estabilidade assintótica global para sistemas lineares, contínuos e discretos, sujeito a comutação (DAIHA; DEAECTO, 2019; DEAECTO; GEROMEL, 2008; DEAECTO, 2007).

## 5.1 Desigualdade de Lyapunov–Metzler

Inicialmente, considere um sistema linear autônomo, contínuo ou discreto, sujeito a comutação, como definido pela equação (5.1).

$$\Delta[\dot{x}] = A_{\sigma(\cdot)} \Delta[x], \quad x(0) = x_0. \quad (5.1)$$

Na expressão (5.1),  $\Delta[x] \in \mathbb{R}^n$  são os estados do sistema,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é a condição inicial,  $\sigma(\cdot)$  é a regra de comutação que a cada instante de tempo seleciona uma das matrizes de estado  $A_{\sigma(\cdot)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dentre aquelas pertencentes ao conjunto  $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_N\}$ .

Conforme Geromel e Colaneri (2006a, 2006b), a estabilidade assintótica do sistema (5.1) pode ser obtida ao considerar a seguinte função de Lyapunov quadrática por partes.

$$V(x) := \min_{i=1, 2, \dots, N} x^T Q_i x = \min_{\psi \in \Psi} \left( \sum_{i=1}^N \psi_i x^T Q_i x \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (5.2)$$

Sendo  $Q_i$  correspondente as matrizes de estabilidade dos  $N$  subsistemas disponíveis para chaveamento e os escalares  $\psi_i$  contidos no conjunto convexo definidos por (5.3).

$$\Psi := \left\{ \psi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \psi_i = 1, \psi_i \geq 0 \right\} \quad (5.3)$$

Entretanto, percebe-se que (5.2) não é diferenciável para todo  $\Delta[x] \in \mathbb{R}^n$ , como pode ser verificada em detalhes em Deaecto e Geromel (2018). Com o intuito de contornar tal problema Geromel e Colaneri (2006a, 2006b) consideram a existência de uma classe de matrizes denominadas de matrizes de Metzler, denotadas por  $\mathcal{M}$  e definidas em (5.4), cujos elementos da diagonal principal são não-positivos para formular os Teoremas 5.1.1 e 5.1.2.

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{array}{l} \pi_{ji} \geq 0, \quad i \neq j \\ \sum_{i=1}^N \pi_{ji} = 0, \quad \forall i, j \end{array} \right. \quad (5.4)$$

**Teorema 5.1.1 (Geromel e Colaneri (2006a))** *Suponha que exista um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas  $Q_{\sigma(x(t))} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N\}$  e uma matriz  $\Pi \in \mathcal{M}$  que satisfazem a desigualdade de Lyapunov-Metzler*

$$A_i^T Q_i + Q_i A_i + \sum_{j=1}^N \pi_{ji} Q_j < 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (5.5)$$

Então a regra de comutação

$$\sigma(x(t)) = \arg \min_{\sigma(x(t))=1, \dots, N} x(t)^T Q_{\sigma(x(t))} x(t) \quad (5.6)$$

Pode levar o sistema  $\dot{x}(t) = A_{\sigma(x(t))} x(t)$  a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

**Prova do Teorema 5.1.1** Ver Geromel e Colaneri (2006a).  $\square$

**Teorema 5.1.2 (Geromel e Colaneri (2006b))** Suponha que exista um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas  $Q_{\sigma(x(k))} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N\}$  e uma matriz  $\Pi \in \mathcal{M}$  que satisfazem a desigualdade de Lyapunov-Metzler

$$A_i^T \left( \sum_{j=1}^N \pi_{ji} Q_j \right) A_i - Q_i < 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (5.7)$$

Então a regra de comutação

$$\sigma(x(k)) = \arg \min_{\sigma(x(k))=1, \dots, N} x(k)^T Q_{\sigma(x(k))} x(k) \quad (5.8)$$

Pode levar o sistema  $x(k+1) = A_{\sigma(x(k))} x(k)$  a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

**Prova do Teorema 5.1.2** Ver Geromel e Colaneri (2006b).  $\square$

Os Teoremas 5.1.1 e 5.1.2 introduzem as desigualdades de Lyapunov–Metzler para os casos contínuo e discreto, respectivamente. Além de definir as regras de chaveamentos, equações (5.6) e (5.8), que em conjunto com a respectiva desigualdade de Lyapunov–Metzler podem conduzir um dado sistema chaveado a estabilidade global assintótica.

No entanto, as desigualdades (5.5) e (5.7) possuem natureza não-convexa ocasionada pelo produto de variáveis  $(\pi_{ji} Q_j)$ . Desta forma, não é possível empregar solvers baseado em programação semidefinida (LMILAB, SDP3 ou SeDuMi, por exemplo) para a solução de problema que as envolvem (DEAECTO; GEROMEL, 2008; DEAECTO; GEROMEL, 2018).

Para solucionar esse problema Geromel e Colaneri (2006a, 2006b), adotam uma postura mais conservadora ao considerar uma subclasse das matrizes de Metzler, onde os elementos da

diagonal principal são iguais, i. e.,  $\pi_{ii} = \eta$  onde  $(1 - \eta)^{-1} \sum_{j \neq i=1}^N \pi_{ji} = 1$  e, portanto, formular os Corolários 5.1.1 e 5.1.2.

**Corolário 5.1.1 (Geromel e Colaneri (2006a))** *Suponha que existe um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas  $Q_{\sigma(x(t))} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N\}$  e um escalar positivo  $\eta$  que satisfazem a desigualdade de Lyapunov-Metzler modificada*

$$A_i^T Q_i + Q_i A_i + \eta (Q_j - Q_i) < 0, \quad i \neq j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (5.9)$$

*Então a regra de comutação*

$$\sigma(x(t)) = \arg \min_{\sigma(x(t))=1, \dots, N} x(t)^T Q_{\sigma(x(t))} x(t) \quad (5.10)$$

*Pode levar o sistema  $\dot{x}(t) = A_{\sigma(x(t))} x(t)$  a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.*

**Prova do Corolário 5.1.1** *Ver Geromel e Colaneri (2006a).* □

**Corolário 5.1.2 (Geromel e Colaneri (2006b))** *Suponha que existe um conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas  $Q_{\sigma(x(k))} = \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N\}$  e um escalar positivo  $\eta$  que satisfazem a desigualdade de Lyapunov-Metzler modificada*

$$A_i^T (\eta Q_i + (1 - \eta) Q_j) A_i - Q_i < 0, \quad i \neq j = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (5.11)$$

*Então a regra de comutação*

$$\sigma(x(k)) = \arg \min_{\sigma(x(k))=1, \dots, N} x(k)^T Q_{\sigma(x(k))} x(k) \quad (5.12)$$

*Pode levar o sistema  $x(k+1) = A_{\sigma(x(k))} x(k)$  a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.*

**Prova do Corolário 5.1.2** *Ver Geromel e Colaneri (2006b).* □

Vale salientar, que em ambos os corolários,  $\eta$  é um escalar positivo definido, determinado por uma busca unidimensional ou fixado pelo projetista.

## 6 CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO

Desde sua proposição por Kothare *et al.* (1996), o RMPC têm sido explorado nas mais diversas aplicações, sendo a principal diferença entre elas a descrição das incertezas, sob a qual a planta ou processo, alvo do controle, encontra-se submetido.

Segundo Camacho e Bordons (2007), a representação adequada das incertezas é fundamental para qualquer projeto de controle. Certamente, caso a modelagem de incertezas não represente de forma adequada a dinâmica da planta o controlador não atenderá aos critérios de projeto. Entretanto, quanto mais complexo for a representação das incertezas maior será a demanda computacional exigida na execução do algoritmo, podendo tornar o problema intratável computacionalmente (CAMACHO, 1995; CAMACHO, 1999).

Os modelos de incertezas mais explorados no meio acadêmico são aqueles cuja representação da dinâmica do sistema é dada por um conjunto de modelos diferentes ou por um modelo nominal sujeito a ação de ruídos e perturbações, como será discutido nas seções seguintes.

### 6.1 Modelo de Incertezas Politópicas

Conforme Boyd *et al.* (1994), a definição 6.1.1 é capaz de descrever formalmente o conceito de polítopo, sendo este ilustrado de forma didática pela Figura 4.

**Definição 6.1.1** *Um polítopo é uma casca convexa composta por um conjunto finito de vértices, onde todos os seus elementos podem ser caracterizados pela combinação convexa destes.*

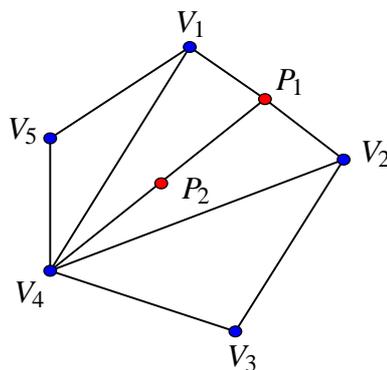


Figura 4 – Exemplo de Região Politópica.

Na Figura 4, observa-se um conjunto politópico  $\Omega = C_o \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_5\}$ , com cinco vértices onde qualquer ponto  $P$  pertencente ao conjunto pode ser escrito como uma combinação convexa dos vértices que o compõem (COSTA, 2012; AGUIRRE, 2007).

Conforme Kothare *et al.* (1996), ao caracterizar um conjunto de modelos lineares correspondentes a diferentes condições de operação para um sistema não linear discreto, pode-se aproxima-lo a um sistema linear variante no tempo (*Linear Time Varying* - LTV) modelado no espaço de estados por incertezas politópicas, como segue na expressão (6.1).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Onde as matrizes do sistema (6.1), no espaço de estados, compõem um conjunto de incertezas politópicas, ou seja  $[A(k) \ B(k) \ C(k) \ D(k)] \in \Omega$ , definido em (6.2).

$$\Omega = C_o \left\{ [A_1 \ B_1 \ C_1 \ D_1], [A_2 \ B_2 \ C_2 \ D_2], \dots, [A_N \ B_N \ C_N \ D_N] \right\} \quad (6.2)$$

Na expressão (6.2),  $N$  é o número de vértices do politopo, podendo ser determinados, ao tomar os extremos das incertezas do sistema. Perceba, que se  $N$  for igual a um o sistema (6.1) passa a descrever um sistema linear invariante no tempo (*Linear Time Invariant* - LTI).

## 6.2 Modelo de Incertezas Fracionárias

Segundo Kothare *et al.* (1996), o modelo de incertezas mais abordado em pesquisas envolvendo controle robusto consiste em um sistema LTI sujeito a incertezas ou perturbações ponderadas por uma realimentação, como ilustrado pela Figura 5 e expresso por (6.3).

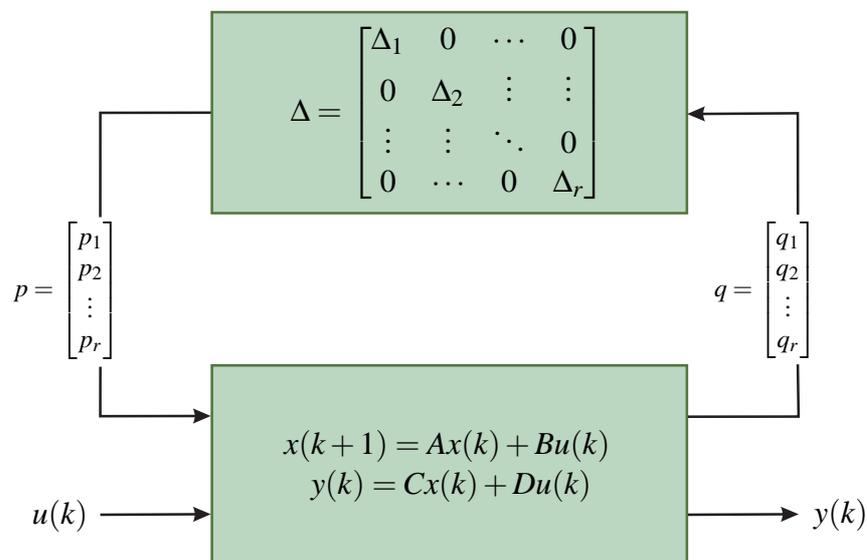


Figura 5 – Modelo de Incertezas Fracionárias.

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Pp(k) \\
y(k) &= Cx(k) + Du(k) \\
q(k) &= Ex(k) + Fu(k) \\
p(k) &= \Delta q(k)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Sendo os elementos de  $\Delta$  limitados em norma, ou seja,  $\|\Delta_i(k)\|_2 \equiv \bar{\sigma}(\Delta_i(k)) \leq 1, \forall k \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, r$ . Desta forma, a relação entre  $p(k) \in \mathbb{R}^p$  e  $q(k) \in \mathbb{R}^q$  pode ser expressa conforme (6.4) (PACKARD; DOYLE, 1993; COCKBURN, 1998).

$$\sum_{j=0}^k p_i(j)^T p_i(j) \leq \sum_{j=0}^k q_i(j)^T q_i(j) \tag{6.4}$$

Portanto, a partir da metodologia proposta em Kothare *et al.* (1996) é possível determinar o conjunto de incertezas estruturadas do modelo estudado, de acordo com a expressão (6.5).

$$\Omega \in \{[A + P\Delta E \quad B + P\Delta F], \quad \bar{\sigma}(\Delta_i(k)) \leq 1\} \tag{6.5}$$

### 6.3 Realimentação de estados via IH-RMPC LMI

O RMPC via LMIs refere-se ao problema de otimização apresentado por (6.6), sendo sua formulação baseada na minimização do índice de desempenho  $J_M(k)$ , expresso por (6.7). Tal estratégia de controle pode ser projetado a um horizonte de predição finito (*Receding Horizon - RH*) ou infinito (*Infinity Horizon - IH*) (KOTHARE *et al.*, 1996).

$$\min_{u(k+i|k), \forall i \geq 0, k \geq 0} \max_{\Omega} J_M(k) \tag{6.6}$$

$$J_M(k) = \sum_{i=0}^M \left[ x(k+i|k)^T Q_c x(k+i|k) + u(k+i|k)^T R_c u(k+i|k) \right] \tag{6.7}$$

No índice de desempenho (6.7),  $M$  é o horizonte de predição, que como discutido anteriormente, este trabalho adotou  $M = \infty$ , logo podemos denotar (6.7) por  $J_\infty(k)$ . Os termos  $x(k+i|k)$  e  $u(k+i|k)$  são, respectivamente, os estados e o sinal de controle no instante  $(k+i)$  preditos a partir do momento  $(k)$ . As matrizes  $Q_c$  e  $R_c$  são ponderações para os estados e ação de controle, respectivamente, adotadas como sendo simétrica semidefinida positiva, possibilitando, assim, que o processo de minimização possua um único mínimo global (PREUSS, 2016).

Restrições dos sinais de entrada e saída, também podem ser incorporadas ao problema de otimização, permitindo que o projetista considere as faixas de operação de sensores e atuadores utilizados para implementação de um dado modelo em bancada, tornando o controle mais

eficiente (BOYD *et al.*, 1994). Para incorporar restrições de entrada e saída ao controle, considere que a norma euclidiana dos respectivos sinais sejam menores ou iguais ao máximo sinal permitido, como segue nas equações (6.8) e (6.9).

$$\|u_r(k+i|k)\| \leq u_{x_u, \max}, \quad i \geq 0, \quad x_u = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (6.8)$$

$$\|y_r(k+i|k)\| \leq y_{z_y, \max}, \quad i \geq 0, \quad z_y = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (6.9)$$

Conforme Kothare *et al.* (1996), ao tomar o critério de estabilidade de Lyapunov para sistemas em tempo discreto no espaço de estados, sujeito a incertezas politópicas ou fracionárias, é possível determinar o ganho de realimentação de estados, que minimiza o limite superior do índice de desempenho a um horizonte de predição infinito  $J_\infty(k)$ , a cada instante de tempo  $k$  se existe solução para o respectivo problema de otimização, expresso nos Teoremas 6.3.1 e 6.3.2.

**Teorema 6.3.1 (Kothare *et al.* (1996))** *Suponha um sistema modelado no espaço de estados, sujeito a um conjunto de incertezas politópicas, como expresso por (6.10).*

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ [A(k) \ B(k)] &\in \Omega \end{aligned} \quad (6.10)$$

O ganho de realimentação de estados  $K = YS^{-1}$  para lei de controle  $u(k+i|k) = Kx(k+i|k)$ ,  $\forall i \geq 0$ , pode ser determinado se existem  $S = S^T \geq 0$ ,  $Y \geq 0$ ,  $X \geq 0$  e  $Z \geq 0$  tal que o processo de otimização (6.11)–(6.14) seja factível para  $X_{x_u} \leq u_{x_u, \max}^2$ ,  $x_u = 1, 2, 3, \dots, m$ ,  $Z_{z_y} \leq y_{z_y, \max}^2$ ,  $z_y = 1, 2, 3, \dots, n$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, N$ , sendo  $N$  o número de vértices do politopo.

$$\min_{\gamma, S, Y} \gamma \quad (6.11)$$

Sujeito à:

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ x(k|k) & S \end{bmatrix} \geq 0, \quad (6.12)$$

$$\begin{bmatrix} S & * & * & * \\ A_j S + B_j Y & S & * & * \\ Q_c^{1/2} S & 0 & \gamma I & * \\ R_c^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (6.13)$$

Restrições de entrada e saída

$$\begin{bmatrix} X & * \\ Y & S \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} Z & * \\ C(A_j S + B_j Y) & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6.14)$$

**Prova do Teorema 6.3.1** Ver Kothare et al. (1996). □

**Teorema 6.3.2 (Kothare et al. (1996))** Suponha um sistema modelado no espaço de estados, sujeito a um conjunto de incertezas fracionárias, como expresso por (6.15).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Pp(k) \\ q(k) &= Ex(k) + Fu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ p(k) &= \Delta q(k) \end{aligned} \tag{6.15}$$

O ganho de realimentação de estados  $K = YS^{-1}$  para lei de controle  $u(k+i|k) = Kx(k+i|k)$ ,  $\forall i \geq 0$ , pode ser determinado se existem  $S = S^T \geq 0$ ,  $Y \geq 0$ ,  $X \geq 0$ ,  $Z \geq 0$  e  $T^{-1} \geq 0$  tal que o processo de otimização (6.16)–(6.16) seja factível para  $X_{x_u} \leq u_{x_u, \max}^2$ ,  $x_u = 1, 2, 3, \dots, m$ ,  $Z_{z_y} \leq y_{z_y, \max}^2$  e  $z_y = 1, 2, 3, \dots, n$ .

$$\min_{\gamma, S, Y, \Lambda} \gamma \tag{6.16}$$

Sujeito à:

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ x(k|k) & S \end{bmatrix} \geq 0, \tag{6.17}$$

$$\begin{bmatrix} S & * & * & * & * \\ AS + BY & S - P\Lambda P^T & * & * & * \\ ES + FY & 0 & \Lambda & * & * \\ Q_c^{1/2} S & 0 & 0 & \gamma I & * \\ R_c^{1/2} Y & 0 & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \tag{6.18}$$

Restrições de entrada e saída

$$\begin{bmatrix} X & * \\ Y & S \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} ZS & * & * \\ ES + FY & T^{-1} & * \\ C(A_j S + B_j Y) & 0 & I - CPT^{-1}P^T C^T \end{bmatrix} \geq 0 \tag{6.19}$$

Onde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n \times 1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n \times 2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{n \times r} \end{bmatrix} \geq 0, \quad T = \begin{bmatrix} t_1 I_{n \times 1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 I_{n \times 2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t_r I_{n \times r} \end{bmatrix} \geq 0, \tag{6.20}$$

**Prova do Teorema 6.3.2** Ver Kothare et al. (1996). □

## 6.4 Realimentação de saída via IH-RMPC LMI

Wan e Kothare (2002, 2003), apresentam a síntese de um controlador preditivo robusto por realimentação de saída. A dinâmica proposta pelos autores pode ser resumida em três etapas: Inicialmente, determina-se o ganho de realimentação de estados, como descrito nos Teoremas 6.3.1 ou 6.3.2 dependendo do modelo de incertezas. Em seguida, projeta-se um estimador de estados de forma independente como especificado no Teorema 6.4.1 e, por último, verifica-se a robustez do conjunto *Controlador-Observador*, por intermédio da implementação dos Teoremas 6.4.2 ou 6.4.3, para o respectivo modelo de incertezas.

### 6.4.1 Observador de Estados

Visando a síntese do estimador de estados, considere que o respectivo sistema, alvo de controle, seja plenamente observável cujo modelo estimado é dado pela equação (6.21).

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A_0\hat{x}(k) + B_0u(k) + L(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= C_0\hat{x}(k), \quad \hat{x}(0) = 0\end{aligned}\tag{6.21}$$

Na expressão (6.21),  $\hat{x}(k)$  e  $\hat{y}(k)$  são os estados e saída do modelo estimado, as matrizes  $A_0$ ,  $B_0$  e  $C_0$  correspondem ao modelo estacionário ou nominal da planta e  $L$  é o ganho do estimador de estados determinado a partir da implementação do Teorema 6.4.1.

**Teorema 6.4.1 (Wan e Kothare (2002))** *Considere o sistema estimado (6.21) sujeito a taxa de decaimento do erro de estimação  $\xi$  ( $0 < \xi < 1$ ). Então é possível determinar o ganho de estimação de estados  $L$ , sendo  $L = S^{-1}Y$ , se existirem as matrizes  $S = S^T \geq 0$  e  $Y \geq 0$  tal que a LMI (6.22) seja satisfeita.*

$$\begin{bmatrix} \xi^2 S & SA_0 - YC_0 \\ * & S \end{bmatrix} \geq 0\tag{6.22}$$

**Prova do Teorema 6.4.1** *Ver Wan e Kothare (2002).* □

### 6.4.2 Estabilidade Robusta *Controlador-Observador*

Objetivando atestar a estabilidade robusta em malha fechada para o conjunto *Controlador-Observador* aplicado a um dado sistema, cujo modelo de incertezas é politópico ou fracionário (Veja as seções 6.1 e 6.2) são formulados os Teoremas 6.4.2 e 6.4.3.

**Teorema 6.4.2 (Wan e Kothare (2002))** *Considere as matriz de estados que descreve a dinâmica entre os sistemas real e estimado, definida por (6.23).*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & BK \\ LC_0 & A_0 + B_0K - LC_0 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

*O conjunto Controlador-Observador será globalmente assintoticamente estável se, existirem os ganhos de realimentação e estimação de estados  $K$  e  $L$ , caracterizados respectivamente nos Teoremas 6.3.1 e 6.4.1 e a matriz  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T \geq 0$  tal que a LMI (6.24) seja factível.*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q} & * \\ \mathcal{A}\mathcal{Q} & \mathcal{Q} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6.24)$$

**Prova do Teorema 6.4.2** *Ver Wan e Kothare (2002).* □

**Teorema 6.4.3 (Wan e Kothare (2002))** *Considere as matriz de estados, entrada e saída do modelo que descreve a dinâmica entre os sistemas real e estimado, definida por (6.25) – (6.26).*

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & BK \\ LC_0 & A_0 + B_0K - LC_0 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} P & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} E & FK \end{bmatrix}^T \quad (6.26)$$

*O conjunto Controlador-Observador será globalmente assintoticamente estável se, existirem os ganhos de realimentação e estimação de estados  $K$  e  $L$ , caracterizados respectivamente nos Teoremas 6.3.2 e 6.4.1 e a matriz  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T \geq 0$  tal que a LMI (6.27) seja factível.*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q} & * & * \\ \mathcal{A}\mathcal{Q} & \mathcal{Q} - \mathcal{B}^T \Lambda \mathcal{B} & * \\ \mathcal{C}\mathcal{Q} & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6.27)$$

**Prova do Teorema 6.4.3** *Ver Wan e Kothare (2002).* □

## 7 CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO COMUTADO

Neste capítulo, são apresentados duas formulações do controlador preditivo robusto baseado em modelo para sistemas lineares sujeitos a comutação cujos modelos de incerteza foram previamente descritos nas seções 6.1 e 6.2, respectivamente.

A primeira formulação aplica os conceitos de estabilidade de Lyapunov (veja a seção 4.5) ao admitir a existência de múltiplas funções de Lyapunov, para os  $N$  subsistemas disponíveis para a ação de comutação, como abordado por Benallouch *et al.* (2014), bem como a técnica de relaxação proposta por Cuzzola *et al.* (2002) (veja a seção 4.6). A segunda abordagem utiliza os conceitos de estabilidade de Lyapunov–Metzler (veja a seção 5.1) como empregado por Esfahani e Pieper (2019) para o projeto de um controlador preditivo baseado em modelo.

Neste contexto, salienta-se que ambas as formulações do SR-MPC via LMIs podem ser implementadas nos *designs online* e *offline* e nas configurações de realimentação de estados e saída, sendo esse último associado a um estimador de estados.

Objetivando a síntese do SR-MPC, para ambas as formulações, considere o índice de desempenho quadrático a um horizonte de predição infinito, definido pela equação (7.1), como abordado por Esfahani e Pieper (2019) e Benallouch *et al.* (2014).

$$J_{\infty}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \|x(k)\|_{R_x}^2 + \|u(k)\|_{R_u}^2 - \lambda^2 \|w(k)\|_{R_w}^2 \quad (7.1)$$

No índice (7.1),  $J_{\infty}(k)$ ,  $\forall k \geq 0$  representa o consumo de energia pela ação de controle, a constante de atenuação de ruído dada por  $\lambda > 0$ ,  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  são os estados do sistema,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de controle,  $w(k) \in \mathbb{R}^r$  é uma entrada exógena ao sistema, definida em (7.2) e, por fim as matrizes de ponderação do sistema definidas como  $R_x > 0$ ,  $R_u > 0$  e  $R_w > 0$ .

$$\mathbb{W} = \left\{ w \in \mathbb{R}^r \mid \|W\|_{\mathcal{L}_2^r} \leq w_{\max} \right\} \quad (7.2)$$

### 7.1 SR-MPC via Função de Lyapunov Múltipla

Inicialmente, considere o sistema linear sujeito a comutação conforme (7.3).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + W_{\sigma(k)}w(k) \\ y(k) &= C_{\sigma(k)}x(k) + D_{\sigma(k)}u(k) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Na expressão (7.3),  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  são os estados do sistema,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de controle,  $y(k) \in \mathbb{R}^q$  é o sinal de saída,  $w(k) \in \mathbb{R}^r$  é a perturbação exógena, definida em (7.2).

As matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $W$ ,  $C$  e  $D$  correspondem respectivamente, aos estados, entrada, perturbação, saída e transição direta, sendo que todas estas variam de acordo com a regra de comutação que a cada instante de tempo seleciona um dado modelo local do conjunto composto pelos  $N$  subsistemas, que descrevem a dinâmica do modelo global, disponíveis para a ação de chaveamento, como expresso por (7.4).

$$\sigma(k) \in \mathbb{N}, \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, N\}, \forall k \geq 0 \quad (7.4)$$

Fundamentado em Geromel e Colaneri (2006a, 2006b), é assumido o critério de estabilidade de via múltiplas funções de Lyapunov para sistemas chaveados, como expresso em (7.5) e a regra de comutação dada pela equação (7.6).

$$V(x(k|k), \sigma(k)) = x(k|k)^T Q_{\sigma(k)} x(k|k) \quad (7.5)$$

$$\sigma(x(k)) = \arg \min_{\sigma(k) \in \mathbb{N}} x(k|k)^T Q_{\sigma(k)} x(k|k) \quad (7.6)$$

Nas expressões (7.5) e (7.6),  $Q_{\sigma(k)}$  é a matriz de estabilidade do respectivo subsistema no instante  $k$ . Suponha, ainda, que existam restrições impostas ao sinal de controle e ao comportamento dos estados, como descritas, respectivamente, em (7.7) e (7.8).

$$\mathbb{U} = \{u(k) : -u_{\text{lim}}^{z_d} \leq u^{z_d}(k) \leq u_{\text{lim}}^{z_d}, z_d = 1, 2, \dots, m\} \quad (7.7)$$

$$\mathbb{X} = \{x(k) : -x_{\text{lim}}^{v_d} \leq x^{v_d}(k) \leq x_{\text{lim}}^{v_d}, v_d = 1, 2, \dots, n\} \quad (7.8)$$

Objetivando a minimização do índice de desempenho, expresso em (7.1) e adotando as matrizes de ponderação do sistema como  $R_x = C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} > 0$ ,  $R_u = D_{\sigma(k)}^T D_{\sigma(k)} > 0$  e  $R_w > 0$  é possível formular o Teorema 7.1.1.

**Teorema 7.1.1 (Proposto)** *Considere o sistema linear sujeito a comutação (7.3), sujeito as restrições descritas por (7.7) – (7.8) e uma lei de controle  $u(k) = K_{\sigma(k)} x(k)$  com  $K_{\sigma(k)} = Y_{\sigma(k)} G_{\sigma(k)}^{-1}$ . É possível determinar o ganhos de realimentação de estados,  $K_{\sigma(k)} \in \{K_1, K_2, K_3, \dots, K_N\}$ , para cada subsistema disponível durante o processo de comutação, se existirem  $S_{\sigma(k)} = S_{\sigma(k)}^T \geq 0$ ,  $G_{\sigma(k)} \geq 0$ ,  $Y_{\sigma(k)} > 0$ ,  $Z_{\sigma(k)} > 0$ ,  $V_{\sigma(k)} > 0$ ,  $\eta > 0$  e  $\mu > 0$ , tal que o processo de otimização (7.9) – (7.13) seja factível.*

$$\min_{S_{\sigma}, G_{\sigma}, Y_{\sigma}} \eta \quad (7.9)$$

Sujeito à:

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & * & * & * \\ A_i G_i + B_i Y_i & S_j & * & * \\ C_i G_i + D_i Y_i & 0 & \eta I & * \\ 0 & \eta W_i^T & 0 & \eta \mu R_w \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.10)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \mu w_{\max}^2 & \eta \mu w_{\max}^2 & * \\ x(k|k) & 0 & S_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.11)$$

Restrições de entrada e saída

$$\begin{bmatrix} Z_i & * \\ Y_i & G_i + G_i^T - S_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.12)$$

$$\begin{bmatrix} V_i & * & * \\ A_i G_i + B_i Y_i & \omega_{\max}^{-1} (G_i + G_i^T - S_i) & * \\ W_i & 0 & \omega_{\max}^{-1} I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.13)$$

### Prova do Teorema 7.1.1 (Proposto)

Suponha que o sistemas (7.3) possa ser rearranjado para um sistema em malha fechada via realimentação de estados, como descrito em (7.14).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)} K_{\sigma(k)}) x(k) + W_{\sigma(k)} w(k) \\ y(k) &= (C_{\sigma(k)} + D_{\sigma(k)} K_{\sigma(k)}) x(k) \end{aligned} \quad (7.14)$$

A partir de (7.14), é possível obter as matrizes de estado e saída do modelo em malha fechada dadas, respectivamente, pelas eqs. (7.15) e (7.16).

$$\bar{A}_{\sigma(k)} = A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)} K_{\sigma(k)} \quad (7.15)$$

$$\bar{C}_{\sigma(k)} = C_{\sigma(k)} + D_{\sigma(k)} K_{\sigma(k)} \quad (7.16)$$

Para minimizar o índice de desempenho definido (7.1) é necessário aplicar os conceitos de filtragem por norma  $H_{\infty}$ , estabilidade via múltiplas funções de Lyapunov definido em (7.5) e usar as equações (7.15) e (7.16) para formular desigualdade matricial (7.17).

$$\begin{aligned}
& x(k+i|k)^T \left( \bar{A}_{\sigma(k)}^T Q_{\sigma(k+1)} \bar{A}_{\sigma(k)} - Q_{\sigma(k)} + \bar{C}_{\sigma(k)}^T \bar{C}_{\sigma(k)} \right) x(k+i|k) + \\
& w(k+i|k)^T \left( W_{\sigma(k)}^T Q_{\sigma(k+1)} W_{\sigma(k)} - \lambda^2 R_w \right) w(k+i|k) + \\
& 2x(k+i|k)^T \left( \bar{A}_{\sigma(k)}^T Q_{\sigma(k+1)} W_{\sigma(k)} \right) w(k+i|k) \leq 0
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Colocando  $x(k+i|k)^T$  e  $w(k+i|k)^T$  em evidência, pela esquerda,  $x(k+i|k)$  e  $w(k+i|k)$ , pela direita, é possível reescrever (7.17) de forma matricial, expresso em (7.18).

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{\sigma(k)}^T Q_{\sigma(k+1)} \bar{A}_{\sigma(k)} - Q_{\sigma(k)} + \bar{C}_{\sigma(k)}^T \bar{C}_{\sigma(k)} & * \\ \bar{A}_{\sigma(k)}^T Q_{\sigma(k+1)} W_{\sigma(k)} & W_{\sigma(k)}^T Q_{\sigma(k+1)} W_{\sigma(k)} - \lambda^2 R_w \end{bmatrix} \leq 0 \tag{7.18}$$

Aplicando o complemento de Schur na expressão (7.18) e reorganizando, é possível formular a desigualdade (7.19).

$$\begin{bmatrix} Q_{\sigma(k)} & * & * & * \\ \bar{A}_{\sigma(k)} Q_{\sigma(k+1)} & Q_{\sigma(k+1)} & * & * \\ \bar{C}_{\sigma(k)} & 0 & I & * \\ 0 & W_{\sigma(k)}^T Q_{\sigma(k+1)} & 0 & \lambda^2 R_w \end{bmatrix} \geq 0 \tag{7.19}$$

Por simplicidade foram adotados em (7.19) anotação  $i = \sigma(k)$ ,  $j = \sigma(k+1)$  e fazendo as respectivas substituições  $\mu = \lambda^2$ ,  $Q_i = \eta S_i^{-1}$  e  $Q_j = \eta S_j^{-1}$ . Do exposto, por inspeção, é possível formular (7.20).

$$\begin{bmatrix} \eta S_i^{-1} & * & * & * \\ \bar{A}_i \eta S_j^{-1} & \eta S_j^{-1} & * & * \\ \bar{C}_i & 0 & I & * \\ 0 & W_i^T \eta S_j^{-1} & 0 & \mu R_w \end{bmatrix} \geq 0 \tag{7.20}$$

Aplicando o conceito de relaxação proposto por Cuzzola et al. (2002), é possível supor a existência de uma matriz  $G$ , invertível, de ordem adequada, sendo possível pré e pós multiplicar esta matriz na inequação (7.20) pelo bloco diagonal  $\mathbb{B} = \text{bdiag}(G_i^T, S_j, \eta, \eta)$ , sendo, portanto, possível reescreve-la como (7.21).

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & * & * & * \\ G_i \bar{A}_i & S_j & * & * \\ G_i \bar{C}_i & 0 & \eta I & * \\ 0 & \eta W_i^T & 0 & \eta \mu R_w \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.21)$$

Generalizando a desigualdade (7.21), para o modelo em malha fechada e fazendo a substituição  $Y_i = K_i G_i$  é possível concluir a prova da LMI (7.10).

Objetivando garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada a cada instante de amostragem, considere o problema de otimização expresso por (7.22), sujeito à a condição de estabilidade (7.23).

$$\min_{Q_i, \beta^2} \beta^2 \quad (7.22)$$

$$x(k|k)^T Q_i x(k|k) + \lambda^2 w_{\max}^2 \leq \beta^2 \quad (7.23)$$

A partir (7.23), por inspeção, é possível obter (7.25), onde  $Q_i = \eta S_i^{-1}$ ,  $\eta = \beta^2$  e  $\mu = \lambda^2$ .

$$1 - x(k|k)^T S_i^{-1} x(k|k) - \eta^{-1} \mu w_{\max}^2 \geq 0 \quad (7.24)$$

Rearranjando e aplicando o complemento de Schur na desigualdade (7.24), é possível concluir a demonstração da prova da LMI (7.11).

Para formular as LMIs (7.12) e (7.13), devem ser garantidas que as restrições (7.7) e (7.8) sejam atendidas. Neste caso, foram adotados os mesmos procedimentos utilizados por Kothare et al. (1996) e Benallouch et al. (2014). Primeiramente, para agregar, restrições de entrada no controle, considere que a norma euclidiana do sinal seja menor ou igual ao máximo sinal permitido, conforme expresso nas equações (7.25) – (7.29).

$$\|u^{z_d}(k)\|_2^2 \leq u_{\text{lim}}^{z_d}, \quad \forall k \geq 0, \quad z_d = 1, 2, 3, \dots, m \quad (7.25)$$

$$\max_{k \geq 0} \|u(k)\|_2^2 = \max_{k \geq 0} \|K_i x(k)\|_2^2 \quad (7.26)$$

$$= \max_{k \geq 0} \|Y_i G_i^{-1} x(k)\|_2^2 \quad (7.27)$$

$$\leq \max_{x \in \mathcal{E}} \|Y_i G_i^{-1} x\|_2^2 \quad (7.28)$$

$$= \lambda_{\max} \left[ (Y_i G_i^{-1})^T S_i^{1/2} S_i^{1/2} (Y_i G_i^{-1}) \right] \quad (7.29)$$

Nas expressões (7.25) – (7.29), a condição de projeto do sinal de controle é dada por  $\|u(k)\|_2^2 \leq (u_{\text{lim}}^{z_d})^2$  e  $\varepsilon$  é um conjunto elipsoidal definido em Kothare et al. (1996).

A partir de (7.29), por inspeção, é obtido (7.30).

$$(u_{\text{lim}}^d)^2 - Y_i^T (G_i^T S_i^{-1} G_i)^{-1} Y_i \geq 0 \quad (7.30)$$

Aplicando o complemento de Schur na desigualdade (7.30), a metodologia de relaxação de Cuzzola et al. (2002) e, admitindo a existência de uma variável semidefinida positiva, ou seja,  $Z_i \leq (u_{\text{lim}}^{z_d})^2$ , onde  $z_d = 1, 2, 3, \dots, m$ , é possível formular a LMI (7.12).

Considerando que a norma dos estados do sistema sejam menores ou iguais ao máximo sinal permitido, os estados do sistema podem ser escritos conforme (7.31) – (7.34).

$$\|x^{v_d}(k+1)\|_2^2 \leq x_{\text{lim}}^{v_d}, \quad \forall k \geq 0, \quad v_d = 1, 2, \dots, n \quad (7.31)$$

$$\max_{k \geq 0} \|x(k+1)\|_2^2 = \max_{k \geq 0} \left\| \begin{bmatrix} \bar{A}_i & W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (7.32)$$

$$= \max_{x, w \in \varepsilon} \left\| \begin{bmatrix} \bar{A}_i S_i^{-1/2} & W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_i^{1/2} x \\ w \end{bmatrix} \right\|_2^2 \quad (7.33)$$

$$= (1 + w_{\text{max}}^2) \left[ (\bar{A}_i S_i)^T S_i^{-1} (\bar{A}_i S_i) + W_i^T W_i \right] \quad (7.34)$$

Nas equações (7.31) – (7.34), a condição de projeto do sinal de controle é dada por  $\|x(k)\|_2^2 \leq (x_{\text{lim}}^{v_d})^2$  e  $\varepsilon$  é um conjunto elipsoidal definido em Kothare et al. (1996).

A partir da equação (7.34), é possível obter (7.35).

$$(x_{\text{lim}}^{v_d})^2 - (1 + w_{\text{max}}^2) \left[ (\bar{A}_i S_i)^T S_i^{-1} (\bar{A}_i S_i) + W_i^T W_i \right] \geq 0 \quad (7.35)$$

Aplicando o processo de relaxação em (7.35), considerando que  $V_i \leq (x_{\text{lim}}^{v_d})^2$  onde  $v_d = 1, 2, 3, \dots, n$  e, fazendo  $\omega_{\text{max}} = 1 + w_{\text{max}}^2$  para aplicar o complemento de Schur, é possível concluir a prova da LMI (7.13) e do Teorema 7.1.1.  $\square$

No Teorema 7.1.1,  $Z_i^{z_d} \leq (u_{\text{lim}}^{z_d})^2$  e  $V_i^{v_d} \leq (x_{\text{lim}}^{v_d})^2$  para,  $z_d = 1, 2, 3, \dots, m$  e  $v_d = 1, 2, 3, \dots, n$ . No mais, o distúrbio limitado em norma é descrito por  $w_{\text{max}}$  e  $\omega_{\text{max}} = 1 + w_{\text{max}}^2$ , a constante de atenuação e o limite superior do índice de desempenho são dados, respectivamente, por  $\lambda = \sqrt{\mu}$  e  $\beta = \sqrt{\eta}$ . Vale destacar que, o processo de otimização proposto pode ser feito em função de  $\mu$  ou  $\eta$  sendo que para evitar problemas de bilinearidades, trata-se  $\eta$  ou  $\mu$  como função objetivo e a outra variável como parâmetro de projeto.

Em relação as LMIs que compõem o processo de minimização descrito no Teorema 7.1.1, vale enfatizar que a lei de controle  $u(k) = K_{\sigma(k)}x(k)$ , sendo  $K_{\sigma(k)} = Y_{\sigma(k)}G_{\sigma(k)}^{-1}$ , decorre diretamente da LMI (7.10) e esta garante a estabilidade do sistema sujeito a comutação (7.3) mediante a minimização do índice de desempenho (7.1). No entanto, não garante a robustez do sistema durante à ação de controle.

Com o intuito de contornar tal problema foi adotado a metodologia de projeto proposta por Kothare *et al.* (1996), segundo o qual, a existência de elipsoides invariantes limitando o comportamento dos estados no plano composto pelos mesmos, garantem a robustez da ação de controle para todo o processo iterativo.

Variando em função da regra de comutação (7.5), as elipsoides de estabilidade, sujeitas ao chaveamento entre os  $N$  subsistemas, disponíveis no decorrer da ação de chaveamento, podem ser definidas pela expressão (7.36).

$$\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x^T G_{\sigma(k)}^{-1} x \leq 1 \right\} \quad (7.36)$$

O emprego deste artifício na síntese do controlador, resulta na formulação da LMI (7.11), sendo uma das maiores vantagens deste trabalho em comparação aos desenvolvidos pela maioria das pesquisas envolvendo controle preditivo para sistemas lineares sujeitos a comutação.

Por fim, vale destacar que as LMIs (7.12) e (7.13) correspondem, respectivamente, as restrições do sinal de controle e do comportamento dos estados (7.7) e (7.8). Associadas a regra de comutação (7.5). O modelo proposto faz com que o sistema em malha fechada seja globalmente assintoticamente estável.

### 7.1.1 Observador de Estados

Visando a síntese do observador de estados robusto via LMIs aplicado ao sistema chaveado (7.3), é necessário considerar o sistema estimado (7.37) e, a partir do princípio da superposição (OGATA, 2011), é proposto o Teorema 7.1.2.

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A_{\sigma(k)}\hat{x}(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + W_{\sigma(k)}w(k) + L_{\sigma(k)}(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= C_{\sigma(k)}\hat{x}(k) + D_{\sigma(k)}u(k), \quad \hat{x}(0) = 0 \end{aligned} \quad (7.37)$$

**Teorema 7.1.2 (Proposto)** *Considere o sistema estimado (7.37) sujeito a regra de chaveamento (7.6) e a taxa de decaimento do erro de estimação  $\xi$  ( $0 < \xi < 1$ ). Então, é possível determinar o ganho de estimação de estados  $L_{\sigma(k)} \in \{L_1, L_2, \dots, L_N\}$  onde  $L_{\sigma(k)} = G_{\sigma(k)}^{-1}Y_{\sigma(k)}$ , se existirem matrizes  $Q_{\sigma(k)} = Q_{\sigma(k)}^T \geq 0$ ,  $G_{\sigma(k)} \geq 0$  e  $Y_{\sigma(k)} > 0$ , tal que LMI (7.38) seja satisfeita.*

$$\begin{bmatrix} \xi^2(G_i + G_i^T - Q_i) & * \\ A_i G_i - C_i Y_i & Q_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.38)$$

### Prova do Teorema 7.1.2 (*Proposto*)

A interação entre os sistemas real (7.3) e estimado (7.37), ambos sujeitos a regra de comutação (7.6), permite o equacionamento do erro dinâmico (7.39), sendo minimizado à medida em que o modelo estimado se aproxima da dinâmica temporal do modelo real.

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad (7.39)$$

Segundo Wan e Kothare (2002), a partir da taxa de decaimento do erro de estimação  $\xi$ , é possível definir o ganho do estimador  $L_{\sigma(k)}$  se, existe uma matriz  $P_{\sigma(k)} \geq 0$ , tal que esta satisfaz a seguinte desigualdade (7.40).

$$\xi^2 e(k)^T P_{\sigma(k)} e(k) \geq e(k+1)^T P_{\sigma(k)} e(k+1) \quad (7.40)$$

A partir de (7.39) e (7.40), por inspeção, é obtido (7.41).

$$\xi^2 P_{\sigma(k)} - (A_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)} C_{\sigma(k)})^T P_{\sigma(k)} (A_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)} C_{\sigma(k)}) \geq 0 \quad (7.41)$$

Adotando  $Q_{\sigma(k)} = P_{\sigma(k)}^{-1}$ ,  $L_{\sigma(k)} = Q_{\sigma(k)}^{-1} Y_{\sigma(k)}$  e, adotando a metodologia de relaxação proposta por Cuzzola et al. (2002) (multiplicar (7.41) a esquerda por  $G_{\sigma(k)}$  e a direita por  $G_{\sigma(k)}^T$ ), é possível reescrever (7.41) como (7.42).

$$\begin{aligned} \xi^2 G_{\sigma(k)} Q_{\sigma(k)}^{-1} G_{\sigma(k)}^T - (A_{\sigma(k)} G_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)} C_{\sigma(k)}) Q_{\sigma(k)}^{-1} \\ (A_{\sigma(k)} G_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)} C_{\sigma(k)})^T \geq 0 \end{aligned} \quad (7.42)$$

Fazendo  $i = \sigma(k)$  e aplicando o complemento de Schur na desigualdade (7.42) é obtido a LMI (7.38) e, portanto, conclui-se a prova do Teorema 7.1.2.

□

### 7.1.2 Estabilidade Robusta Controlador-Observador

Seguindo a metodologia de realimentação de saída, proposta por Wan e Kothare (2002, 2003), formula-se o Teorema 7.1.3 para verificar a estabilidade de malha fechada do conjunto Controlador-Observador aplicado ao sistema linear sujeito a comutação (7.3).

**Teorema 7.1.3 (Proposto)** *Considere a matriz de estados do modelo que descreve a dinâmica entre os sistemas real e estimado, expressa em (7.43).*

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} & B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} \\ L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)} & (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)}) \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

*O conjunto Controlador-Observador, sujeito a regra de comutação (7.6), será globalmente assintoticamente estável se existirem os ganhos de realimentação de estados  $K_{\sigma(k)}$ , um ganho de estimação de estados  $L_{\sigma(k)}$ , caracterizados respectivamente nos Teoremas 7.1.1 e 7.1.2 e matrizes  $\mathcal{Q}_{\sigma(k)} = \mathcal{Q}_{\sigma(k)}^T \geq 0$  e  $\mathcal{G}_{\sigma(k)} \geq 0$  de ordem adequada, tal que a LMI (7.44) apresente uma resposta factível.*

$$\begin{bmatrix} (\mathcal{G}_i + \mathcal{G}_i^T - \mathcal{Q}_i) & * \\ \mathcal{A}_i \mathcal{G}_i & \mathcal{Q}_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.44)$$

### Prova do Teorema 7.1.3 (Proposto)

*Considerando a interação entre o sistema (7.3), o modelo determinístico de estimação de estados em (7.37) para formular a expressão (7.45).*

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= (A_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)})\hat{x}(k) + (B_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}D_{\sigma(k)})u(k) + \\ &\quad W_{\sigma(k)}w(k) + L_{\sigma(k)}z(k) \\ \hat{y}(k) &= C_{\sigma(k)}\hat{x}(k) + D_{\sigma(k)}u(k), \quad \hat{x}(0) = 0 \end{aligned} \quad (7.45)$$

*A partir do Teorema 7.1.1 é possível obter a lei de controle  $u(k) = K_{\sigma(k)}\hat{x}(k)$  e fazendo  $D_{\sigma(k)} \equiv 0$  para reescrever (7.45) como (7.46).*

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}F_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)})\hat{x}(k) + \\ &\quad W_{\sigma(k)}w(k) + L_{\sigma(k)}y(k) \\ \hat{y}(k) &= C_{\sigma(k)}\hat{x}(k), \quad \hat{x}(0) = 0 \end{aligned} \quad (7.46)$$

*A partir de (7.46) e do modelo real em malha fechada (7.14) é possível obter o modelo aumentado expresso por (7.47).*

$$\mathcal{X}(k+1) = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} & B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} \\ L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)} & A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

Submetendo o sistema (7.47) ao critério de estabilidade de Lyapunov, pode-se formular (7.48), sendo que  $\mathcal{A}_{\sigma(k)}$  e  $\mathcal{P}_{\sigma(k)}$  correspondem, respectivamente, as matrizes de estados e estabilidade do modelo aumentado.

$$\mathcal{P}_{\sigma(k)} - \mathcal{A}_{\sigma(k)}^T \mathcal{P}_{\sigma(k)} \mathcal{A}_{\sigma(k)} \geq 0 \quad (7.48)$$

Fazendo  $\mathcal{P}_{\sigma(k)} = \mathcal{Q}_{\sigma(k)}^{-1}$ , onde  $\mathcal{Q}_{\sigma(k)} = \mathcal{Q}_{\sigma(k)}^T \geq 0$ , admitindo a existência de uma  $\mathcal{G}_{\sigma(k)}$  invertível e semidefinida positiva e adotando a notação  $i = \sigma(k)$  é possível reescrever a desigualdade (7.48) como (7.49).

$$\mathcal{G}_i^T \mathcal{Q}_i^{-1} \mathcal{G}_i - (\mathcal{A}_i \mathcal{G}_i)^T \mathcal{G}_i^{-1} (\mathcal{A}_i \mathcal{G}_i) \geq 0 \quad (7.49)$$

Aplicando a metodologia de relaxação e o complemento de Schur em (7.49), é possível obter (7.44) e, portanto, concluir a prova do Teorema 7.1.3. □

Portanto, o conjunto *Controlador-Observador* será globalmente assintoticamente estável se existirem ganho de realimentação  $K_{\sigma(k)}$  e estimador de estados  $L_{\sigma(k)}$ , bem como as matrizes  $\mathcal{Q}_{\sigma(k)} = \mathcal{Q}_{\sigma(k)}^T \geq 0$  e  $\mathcal{Q}_i \geq 0$  tal que a LMI (7.44) apresente uma respostas factível.

## 7.2 SR-MPC via Função de Lyapunov–Metzler

Inicialmente, considere um sistema linear sujeito a comutação conforme (7.50), onde as incertezas do modelo são dadas na forma fracionária ou paramétricas, i. e., as perturbações são ponderadas por meio de uma realimentação conforme pode ser verificado na Figura 6.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + P_{\sigma(k)}p(k) + W_{\sigma(k)}w(k) \\ y(k) &= C_{\sigma(k)}x(k) + D_{\sigma(k)}u(k) + G_{\sigma(k)}w(k) \\ q(k) &= E_{\sigma(k)}x(k) + F_{\sigma(k)}u(k) + H_{\sigma(k)}p(k) \\ p(k+1) &= \Delta(k)q(k) \end{aligned} \quad (7.50)$$

No sistema (7.50),  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  são os estados do sistema,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de controle,  $y(k) \in \mathbb{R}^z$  é o sinal de saída,  $w(k) \in \mathbb{R}^r$  é uma entrada exógena ao sistema, definida em (7.2).

No diagrama de blocos 6, é importante destacar que, se a realimentação de incertezas for nula, todo o conjunto de equações descrito em (7.50) recai no conjunto de equações inseridas no bloco inferior da Figura 6, i.e., mesmo modelo abordado na seção 7.1.

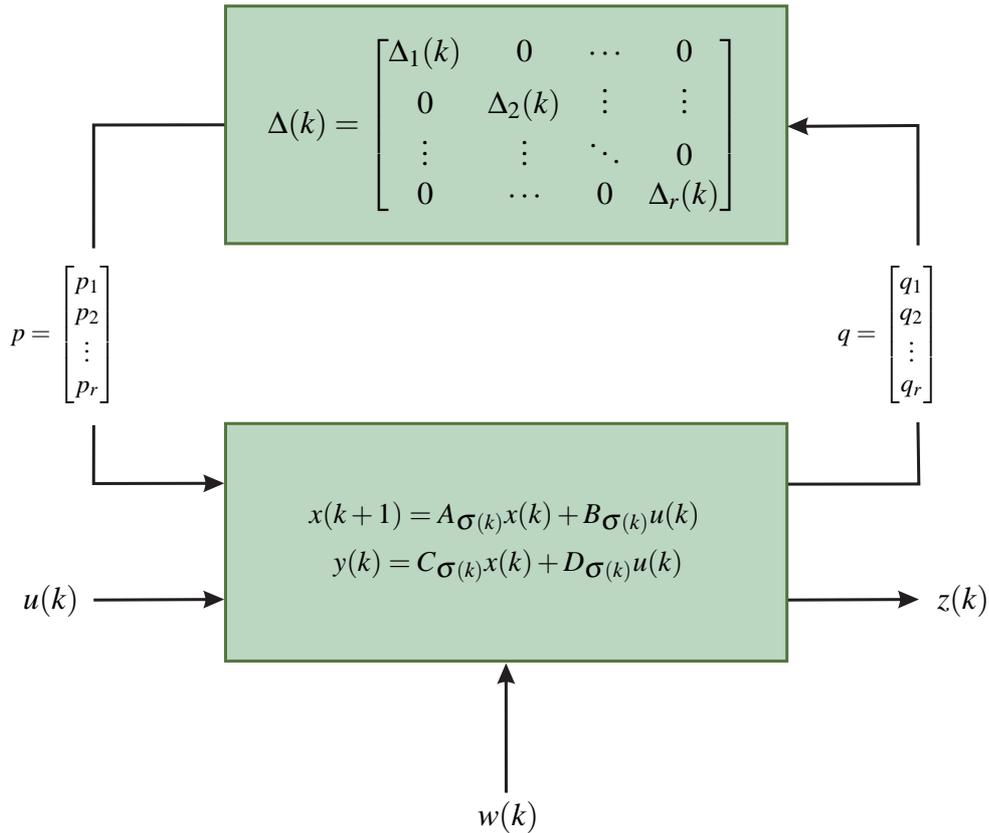


Figura 6 – Sistema Sujeito a Comutação e Incertezas Fracionárias.

Ademais, segue-se o mesmo processo de projeto adotado na seção 7.1 para a síntese do SR-MPC. No entanto, assumido o critério de estabilidade de Lyapunov–Metzler (veja seção 5.1) para o sistemas chaveados (7.50). Sendo, portanto, possível formular o teorema 7.2.1 objetivando a minimização do índice de desempenho (7.1) e definindo as matrizes de ponderação do controle como  $R_x = C_{\sigma(k)}^T C_{\sigma(k)} > 0$ ,  $R_u = D_{\sigma(k)}^T D_{\sigma(k)} > 0$  e  $R_w > 0$ .

**Teorema 7.2.1 (Proposto)** *Considere o sistema definido em (7.50), sujeito a lei de controle  $u(k) = K_{\sigma(k)}x(k)$  com  $K_{\sigma(k)} = Y_{\sigma(k)}S_{\sigma(k)}^{-1}$ . Então, é possível determinar o ganho de realimentação de estados,  $K_{\sigma(k)} \in \{K_1, K_2, K_3, \dots, K_N\}$ , para cada subsistema disponível durante o processo de comutação, se existirem  $S_{\sigma(k)} = S_{\sigma(k)}^T \geq 0$ ,  $T_{\sigma(k)} = T_{\sigma(k)}^T \geq 0$ ,  $Y_{\sigma(k)} \geq 0$ ,  $J_{\sigma(k)} \geq 0$  e  $0 \leq \eta \leq 1$ , tal que o processo de otimização (7.51) – (7.54) seja factível.*

$$\min_{S_{\sigma}, Y_{\sigma}, \Lambda} \gamma \quad (7.51)$$

Sujeito à:

$$\begin{bmatrix} S_i & * & * & * & * & * \\ 0 & \Lambda' & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \gamma\lambda^2 R_w I & * & * & * \\ A_i S_i + B_i Y_i & P_i \Lambda' & \gamma W_i & V'_{ij} & * & * \\ E_i S_i + F_i Y_i & H_i \Lambda' & 0 & 0 & \Lambda' & * \\ C_i S_i + D_i Y_i & 0 & \gamma G_i & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.52)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \lambda^2 w_{\max}^2 & \gamma\lambda^2 w_{\max}^2 & * \\ x(k|k) & 0 & S_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.53)$$

$$\begin{bmatrix} T_i & * \\ J_i & S_j \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.54)$$

Onde  $V_{ij} = J_i + J_i^T - (\eta T_i + (1 - \eta) T_j)$ , para  $i \neq j = 1, 2, 3, \dots, N$ ,  $\Lambda' = \gamma\Lambda$ ,  $V'_{ij} = \gamma V_{ij}$  e  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 I, \lambda_2 I, \lambda_3 I, \dots, \lambda_r I) \geq 0$ .

### Prova do Teorema 7.2.1 (Proposto)

Para minimizar o índice de desempenho (7.1) é necessário aplicar os conceitos de filtragem por norma  $H_\infty$ , estabilidade de Lyapunov-Metzler ao considerar o modelo em malha fechada do sistema chaveado (7.55) para formular desigualdade matricial (7.59).

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \bar{A}_{\sigma(k)} x(k) + P_{\sigma(k)} p(k) + W_{\sigma(k)} w(k) \\ y(k) &= \bar{C}_{\sigma(k)} x(k) + G_{\sigma(k)} w(k) \\ q(k) &= \bar{E}_{\sigma(k)} x(k) + H_{\sigma(k)} p(k) \\ p(k+1) &= \Delta(k) q(k) \end{aligned} \quad (7.55)$$

Sendo as matrizes de estados, saída e da realimentação de incertezas do modelo em malha fechada dadas, respectivamente, pelas equações (7.56) – (7.58).

$$\bar{A}_{\sigma(k)} = A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)} K_{\sigma(k)} \quad (7.56)$$

$$\bar{C}_{\sigma(k)} = C_{\sigma(k)} + D_{\sigma(k)} K_{\sigma(k)} \quad (7.57)$$

$$\bar{E}_{\sigma(k)} = E_{\sigma(k)} + F_{\sigma(k)} K_{\sigma(k)} \quad (7.58)$$

$$\begin{aligned}
& w(k+i|k)^T \left( W_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{W}_{\sigma(k)} + G_{\sigma(k)}^T G_{\sigma(k)} - \lambda^2 R_w I \right) w(k+i|k) + \\
& x(k+i|k)^T \left( \bar{A}_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{A}_{\sigma(k)} - Q_{\sigma(k)} + \bar{C}_{\sigma(k)}^T \bar{C}_{\sigma(k)} \right) x(k+i|k) + \\
& 2x(k+i|k)^T \left( W_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{A}_{\sigma(k)} + G_{\sigma(k)}^T \bar{C}_{\sigma(k)} \right) w(k+i|k) + \\
& 2p(k+i|k)^T \left( W_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{P}_{\sigma(k)} \right) w(k+i|k) + \\
& 2x(k+i|k)^T \left( P_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{A}_{\sigma(k)} \right) p(k+i|k) + \\
& p(k+i|k)^T \left( P_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{P}_{\sigma(k)} \right) p(k+i|k) \leq 0
\end{aligned} \tag{7.59}$$

Salienta-se que em (7.59),  $Q_{\pi(k)} = (\eta Q_{\sigma(k)} + (1 - \eta) Q_{\sigma(k+1)})$  em decorrência direta da desigualdade de Lyapunov-Metzler modificada (5.11). Admitindo o modelo de incertezas discutindo na seção 6.2 e adotando o procedimento proposto por Kothare et al. (1996) formula-se (7.60) e a partir desta reescrever (7.59) como (7.61).

$$\begin{aligned}
& p_j(k+i|k)^T p_j(k+i|k) \leq \\
& (E_{\sigma(k)} x(k+i|k) + H_{\sigma(k)} p_j(k+i|k))^T (E_{\sigma(k)} x(k+i|k) + H_{\sigma(k)} p_j(k+i|k)), \tag{7.60} \\
& j = 1, 2, 3, \dots, r, \quad \forall k \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x(k+i|k)^T \left( \bar{A}_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{A}_{\sigma(k)} - Q_{\sigma(k)} + \bar{C}_{\sigma(k)}^T \bar{C}_{\sigma(k)} + \bar{E}_{\sigma(k)}^T \Lambda \bar{E}_{\sigma(k)} \right) x(k+i|k) + \\
& w(k+i|k)^T \left( W_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{W}_{\sigma(k)} + G_{\sigma(k)}^T G_{\sigma(k)} - \lambda^2 R_w I \right) w(k+i|k) + \\
& p(k+i|k)^T \left( P_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{P}_{\sigma(k)} - \Lambda \left( I - H_{\sigma(k)}^T H_{\sigma(k)} \right) \right) p(k+i|k) + \\
& 2x(k+i|k)^T \left( W_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{A}_{\sigma(k)} + G_{\sigma(k)}^T \bar{C}_{\sigma(k)} \right) w(k+i|k) + \\
& 2x(k+i|k)^T \left( P_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{A}_{\sigma(k)} + H_{\sigma(k)}^T \Lambda \bar{E}_{\sigma(k)} \right) p(k+i|k) + \\
& 2p(k+i|k)^T \left( W_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{P}_{\sigma(k)} \right) w(k+i|k) \leq 0
\end{aligned} \tag{7.61}$$

Para  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 I, \lambda_2 I, \dots, \lambda_r I) \geq 0$ . Colocando  $x(k+i|k)^T$ ,  $p(k+i|k)^T$  e  $w(k+i|k)^T$  em evidência, pela esquerda, e  $x(k+i|k)$ ,  $p(k+i|k)$  e  $w(k+i|k)$ , pela direita, é possível reescrever (7.61) de forma matricial como expresso por (7.62).

$$\begin{bmatrix} x(k+i|k) \\ p(k+i|k) \\ w(k+i|k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & * & * \\ M_{21} & M_{22} & * \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k+i|k) \\ p(k+i|k) \\ w(k+i|k) \end{bmatrix} \leq 0 \tag{7.62}$$

Sendo os elementos de (7.62) dados por  $M_{11} = \bar{A}_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{A}_{\sigma(k)} - Q_{\sigma(k)} + \bar{C}_{\sigma(k)}^T \bar{C}_{\sigma(k)} + \bar{E}_{\sigma(k)}^T \Lambda \bar{E}_{\sigma(k)}$ ,  $M_{21} = P_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{A}_{\sigma(k)} + H_{\sigma(k)}^T \Lambda \bar{E}_{\sigma(k)}$ ,  $M_{31} = W_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{A}_{\sigma(k)}$

$$+ G_{\sigma(k)}^T \bar{C}_{\sigma(k)}, M_{22} = P_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{P}_{\sigma(k)} - \Lambda \left( I - H_{\sigma(k)}^T H_{\sigma(k)} \right), M_{32} = W_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{P}_{\sigma(k)} \text{ e}$$

$$M_{33} = W_{\sigma(k)}^T Q_{\pi(k)} \bar{W}_{\sigma(k)} + G_{\sigma(k)}^T G_{\sigma(k)} - \lambda^2 R_w I.$$

Reorganizando e aplicando o complemento de Schur em (7.62) é possível formular (7.63).

$$\begin{bmatrix} Q_{\sigma(k)} & * & * & * & * & * \\ 0 & \Lambda & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \lambda^2 R_w I & * & * & * \\ Q_{\pi(k)} \bar{A}_{\sigma(k)} & Q_{\pi(k)} P_{\sigma(k)} & Q_{\pi(k)} W_{\sigma(k)} & Q_{\pi(k)} & * & * \\ \Lambda \bar{E}_{\sigma(k)} & \Lambda H_{\sigma(k)} & 0 & 0 & \Lambda & * \\ \bar{C}_{\sigma(k)} & 0 & G_{\sigma(k)} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.63)$$

Adotando a notação,  $i = \sigma(k)$  e  $j = \sigma(k+1)$ , logo  $Q_{\pi(k)} = Q_{ij} = (\eta Q_i + (1-\eta) Q_j)$ , pré e pós multiplicando (7.63) pelo bloco diagonal  $\mathbb{B} = \text{bdiag}(Q_i^{-1}, \Lambda^{-1}, I, Q_{ij}^{-1}, \Lambda^{-1}, I)$ , é possível reescreve-la como (7.64).

$$\begin{bmatrix} Q_i^{-1} & * & * & * & * & * \\ 0 & \Lambda^{-1} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \lambda^2 R_w I & * & * & * \\ \bar{A}_i Q_i^{-1} & P_i \Lambda^{-1} & W_i & Q_{ij}^{-1} & * & * \\ \bar{E}_i Q_i^{-1} & H_i \Lambda^{-1} & 0 & 0 & \Lambda^{-1} & * \\ \bar{C}_i Q_i^{-1} & 0 & G_i & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.64)$$

Para expressando a desigualdade (7.64) em função do sistema em malha aberta, tome  $Q_i = \gamma S_i^{-1}$ ,  $Y_i = K_i S_i$  e  $\Lambda' = \gamma \Lambda^{-1}$ . Além disso, em conformidade com Esfahani e Pieper (2019), admita a existência de umas matrizes de ordem adequada, denominadas  $J$  e  $T$ , sendo a primeira invertível e a segunda simétrica semidefnida positiva tal que,  $Q_{ij}^{-1} = V_{ij} = J_i + J_i^T - (\eta T_i + (1-\eta) T_j)$  para  $V'_{ij} = \gamma V_{ij}$  é possível concluir a prova da LMI (7.52).

Visando a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada a cada instante de amostragem, considere o problema de otimização (7.65), sujeito à condição de estabilidade (7.66).

$$\min_{Q_i, \gamma} \gamma \quad (7.65)$$

$$x(k|k)^T Q_i x(k|k) + \lambda^2 w_{\max}^2 \leq \gamma \quad (7.66)$$

A partir (7.66), por inspeção, é possível obter (7.67), onde  $Q_i = \gamma S_i^{-1}$ .

$$1 - x(k|k)^T S_i^{-1} x(k|k) - \gamma^{-1} \lambda^2 w_{\max}^2 \geq 0 \quad (7.67)$$

Rearranjando e aplicando o complemento de Schur na desigualdade (7.67), é possível concluir a demonstração da LMI (7.53).

Por fim, com o intuito de assegurar a viabilidade de (7.52), considere o problema de otimização (7.68), sujeito à (7.69).

$$\min_{Q_j, T_i, J_i} \gamma \quad (7.68)$$

$$J_i^T Q_j J_i \leq \gamma T_i \quad (7.69)$$

Fazendo  $Q_j = \gamma S_j^{-1}$  e por inspeção é possível reescrever (7.69) como (7.70).

$$T_i - J_i^T S_j^{-1} J_i \geq 0 \quad (7.70)$$

Rearranjando e aplicando o complemento de Schur na desigualdade (7.70), é possível concluir a demonstração da prova da LMI (7.54) e do Teorema 7.2.1.

□

No Teorema 7.2.1, o distúrbio limitado em norma é descrito por  $w_{\max}$  e  $\omega_{\max} = 1 + w_{\max}^2$ , a constante de atenuação e o limite superior do índice de desempenho são dados, respectivamente, por  $\lambda$  e  $\gamma$ . Vale destacar, que assim como em Benallouch *et al.* (2014), o processo de otimização proposto pode ser feito em função de  $\lambda$  ou  $\gamma$  sendo que para evitar problemas de bilinearidades, trata-se  $\lambda$  ou  $\gamma$  como função objetivo e a outra variável como parâmetro de projeto.

Em relação as LMIs que compõem o processo de minimização descrito no Teorema 7.2.1, destaca-se que a lei de controle  $u(k) = K_{\sigma(k)} x(k)$ , decorre diretamente da LMI (7.52) e esta garante a estabilidade do sistema (7.50) mediante a minimização do índice de desempenho (7.1) submetidos a regra de comutação (5.2) que, por sua vez depende dos estados medidos ou estimados do sistema (7.50).

No entanto, apenas a LMI (7.52) não garante a robustez do sistema durante à ação de controle, sendo necessário formulara a LMI (7.53), fundamentada no conceito de elipsoides de estabilidade introduzidas na literatura por Kothare *et al.* (1996). Além disso, a LMI (7.54) tem a finalidade de garantir a factibilidade da LMI (7.52), uma vez que para síntese desta foi admitido a existência matrizes auxiliares  $T$  e  $J$ .

### 7.2.1 Observador de Estados

Visando a síntese do controle via realimentação de saída, realiza-se o projeto do observador de estados, Para isso, considere o modelo estimado (7.71) e, a partir do princípio da superposição é proposto o Teorema 7.2.2.

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A_{\sigma(k)}\hat{x}(k) + B_{\sigma(k)}u(k) + W_{\sigma(k)}w(k) + L_{\sigma(k)}(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= C_{\sigma(k)}\hat{x}(k) + D_{\sigma(k)}u(k), \quad \hat{x}(0) = 0\end{aligned}\quad (7.71)$$

**Teorema 7.2.2 (Proposto)** *Considere o sistema estimado (7.71) sujeito a regra de chaveamento (7.6) e a taxa de decaimento do erro de estimação  $\xi$  ( $0 < \xi < 1$ ). Então, é possível determinar o ganho de estimação de estados  $L_{\sigma(k)} \in \{L_1, L_2, \dots, L_N\}$  onde  $L_{\sigma(k)} = S_{\sigma(k)}^{-1}Y_{\sigma(k)}$ , se existirem matrizes  $S_{\sigma(k)} = S_{\sigma(k)}^T \geq 0$  e  $Y_{\sigma(k)} > 0$ , tal que LMI (7.72) seja satisfeita.*

$$\begin{bmatrix} \xi^2 S_i & * \\ A_i S_i - C_i Y_i & S_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.72)$$

#### Prova do Teorema 7.2.2 (Proposto)

A interação entre os sistemas real (7.50) e estimado (7.71), ambos sujeitos a regra de comutação (5.2), permite o equacionamento do erro dinâmico (7.73), que será minimizado à medida que o modelo estimado se aproxima da dinâmica temporal do modelo real.

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad (7.73)$$

Segundo Wan e Kothare (2002, 2003), a partir da taxa de decaimento do erro de estimação  $\xi$ , é possível definir o ganho do estimador  $L_{\sigma(k)}$  se, existe uma matriz  $Q_{\sigma(k)} \geq 0$ , tal que esta satisfaz a seguinte desigualdade (7.74).

$$\xi^2 e(k)^T Q_{\sigma(k)} e(k) \geq e(k+1)^T Q_{\sigma(k)} e(k+1) \quad (7.74)$$

A partir de (7.73) e (7.74), por inspeção, é obtido (7.75).

$$\xi^2 Q_{\sigma(k)} - (A_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)} C_{\sigma(k)})^T Q_{\sigma(k)} (A_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)} C_{\sigma(k)}) \geq 0 \quad (7.75)$$

Fazendo  $S_{\sigma(k)} = Q_{\sigma(k)}^{-1}$ ,  $L_{\sigma(k)} = Y_{\sigma(k)} S_{\sigma(k)}^{-1}$  e  $i = \sigma(k)$  e aplicando o complemento de Schur na desigualdade (7.75) é obtido (7.72) e, portanto, concluir a prova do Teorema 7.2.2.

□

## 7.2.2 Estabilidade Robusta *Controlador-Observador*

Visando atestar a estabilidade de malha fechada do conjunto *Controlador-Observador* aplicado ao sistema (7.50) é formulado o Teorema 7.2.3.

**Teorema 7.2.3 (Proposto)** *Considere as matriz de estados, entrada e saída do modelo que descreve a dinâmica entre os sistemas real e estimado ambos sujeitos a ação de comutação, como definidas nas expressões (7.76) – (7.78).*

$$\mathcal{A}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} & B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} \\ L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)} & (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)}) \end{bmatrix} \quad (7.76)$$

$$\mathcal{B}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} P_{\sigma(k)} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (7.77)$$

$$\mathcal{C}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} E_{\sigma(k)} & F_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} \end{bmatrix}^T \quad (7.78)$$

O conjunto *Controlador-Observador*, sujeito a regra de comutação (7.6), será globalmente assintoticamente estável se existirem os ganhos de realimentação de estados  $K_{\sigma(k)}$ , um ganho de estimação de estados  $L_{\sigma(k)}$ , caracterizados respectivamente nos Teoremas 7.2.1 e 7.2.2 e matrizes  $\mathcal{Q}_{\sigma(k)} = \mathcal{Q}_{\sigma(k)}^T \geq 0$ , tal que a LMI (7.79) apresente uma resposta factível.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_i & * & * \\ \mathcal{A}_i \mathcal{Q}_i & \mathcal{Q}_i - \mathcal{B}_i^T \Lambda \mathcal{B}_i & * \\ \mathcal{C}_i \mathcal{Q}_i & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.79)$$

### Prova do Teorema 7.2.3 (Proposto)

Considerando o modelo determinístico de estimação de estados é possível formular (7.80).

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= (A_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)})\hat{x}(k) + (B_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}D_{\sigma(k)})u(k) + \\ &\quad W_{\sigma(k)}w(k) + L_{\sigma(k)}y(k) \\ \hat{y}(k) &= C_{\sigma(k)}\hat{x}(k) + D_{\sigma(k)}u(k), \quad \hat{x}(0) = 0 \end{aligned} \quad (7.80)$$

Adotando a lei de controle  $u(k) = K_{\sigma(k)}\hat{x}(k)$  e  $D_{\sigma(k)} \equiv 0$  obtêm-se a equação (7.81).

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}F_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)})\hat{x}(k) + \\ &\quad W_{\sigma(k)}w(k) + L_{\sigma(k)}z(k) \\ \hat{z}(k) &= C_{\sigma(k)}\hat{x}(k), \quad \hat{x}(0) = 0 \end{aligned} \quad (7.81)$$

A partir da interação entre o sistema estimado (7.81) e do real, ambos em malha fechada é possível obter o modelo aumentado expresso por (7.82).

$$\mathcal{X}(k+1) = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} & B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} \\ L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)} & A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)} - L_{\sigma(k)}C_{\sigma(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} \quad (7.82)$$

Ao considerar o modelo de incertezas ilustrado pela Figura 6, temos que considerar (7.83) e a matriz de estados e estabilidade do modelo aumentado (7.82) para formular (7.84).

$$p_j(k)^T p_j(k) \leq \mathcal{X}^T E_{\sigma(k)}^T E_{\sigma(k)} \mathcal{X} \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad \forall k \geq 0 \quad (7.83)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{X}(k)^T \mathcal{P} \mathcal{X}(k) - (\mathcal{A}_{\sigma(k)} \mathcal{X}(k) + \mathcal{B}_{\sigma(k)} p(k))^T \mathcal{P} (\mathcal{A}_{\sigma(k)} \mathcal{X}(k) + \mathcal{B}_{\sigma(k)} p(k)) \\ & - \left( \mathcal{X}(k)^T \mathcal{C}_{\sigma(k)}^T \Lambda' \mathcal{X}(k) \mathcal{C}_{\sigma(k)} - p(k)^T \Lambda' p(k) \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (7.84)$$

Rearranjando e colocando  $\mathcal{X}(k)^T$  e  $p(k)^T$  em evidência pela direita e  $\mathcal{X}(k)$  e  $p(k)$  pela esquerda é possível formular (7.85).

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} - \mathcal{A}_{\sigma(k)}^T \mathcal{P} \mathcal{A}_{\sigma(k)} - \mathcal{C}_{\sigma(k)}^T \Lambda' \mathcal{C}_{\sigma(k)} & * \\ -\mathcal{B}_{\sigma(k)}^T \mathcal{P} \mathcal{A}_{\sigma(k)} & \Lambda' - \mathcal{B}_{\sigma(k)}^T \mathcal{P} \mathcal{B}_{\sigma(k)} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (7.85)$$

Adotando, por comodidade a notação  $i = \sigma(k)$  substituindo  $\mathcal{P} = \mathcal{Q}^{-1}$  e  $\Lambda' = \Lambda^{-1}$  e aplicando o complemento de Schur na desigualdade (7.85), é possível obter a LMI (7.9) e, portanto, concluir a prova do Teorema 7.2.3.

□

### 7.3 Algoritmos online e offline

O SR-MPC caracterizado pelos teoremas propostos nas seções 7.1 e 7.2 podem ser implementados por meio de duas metodologias distintas, são elas os algoritmos *online* e *offline*.

No algoritmo *online*, o ganho do controlador é determinado automaticamente a cada instante de amostragem. Isso implica em um esforço computacional crescente à medida que à complexidade dos processos, alvos de controle, aumentam Wan e Kothare (2002, 2003).

O algoritmo *offline*, consiste na obtenção da lei de controle por meio de interpolações sobre uma LUT fundamentada na existência das elipsóides de estabilidades propostas inicialmente por Kothare *et al.* (1996). Além disso, permite a simplificação da lei de controle para a qual basta inserir a LUT em um dado microcontrolador, para aplicações práticas.

Os Algoritmos 7.3.1 e 7.3.2, respectivamente, indicam de forma didática a metodologia de implementação das disposições *online* e *offline* do SR-MPC proposto neste trabalho.

**Algoritmo 7.3.1** (*SR-MPC Online*)

Considere uma condição inicial  $x(0)$ , tal que a respectiva condição seja satisfeita:

$$\|x(0)\|_{G_{\sigma(k)}^{-1}}^2 \leq 1 \text{ ou } \|x(0)\|_{S_{\sigma(k)}^{-1}}^2 \leq 1$$

Tome  $k := 1$ , então siga os passos:

I A partir da implementação do Teorema 7.1.1 ou 7.2.1, determinar o ganho de realimentação de estados e a matriz de estabilidade que descrevem a elipsoide de estabilidade, que circunscribe os estados do sistema no instante  $k$ .

II Enquanto  $k \leq k_{\text{end}}$ , verificar se a respectiva condição é satisfeita:

$$\|x(k)\|_{G_{\sigma(k)}^{-1}}^2 \leq 1 \text{ ou } \|x(k)\|_{S_{\sigma(k)}^{-1}}^2 \leq 1$$

i – Se não, pare o processo iterativo;

ii – Se sim, faça  $k := k + 1$  e retorne ao passo I.

**Algoritmo 7.3.2** (*SR-MPC Offline*)

Considere uma condição inicial baseada na resposta ao impulso  $x_{\text{set}} \in \mathbb{X}^s$ . Admita uma sequencia de minimizadores por meio da implementação do Teorema 7.1.1 ou 7.2.1.

Tome  $k := 1$ , então siga os passos:

I Avalie os minimizadores, parâmetros de implementação do respectivo Teorema, aplicando a restrição adicional  $G_{k-1} > G_k$  ou  $S_{k-1} > S_k$  (ignore para  $k = 1$ ) e acumule as matrizes de estabilidade e os ganhos em uma tabela de ganhos.

II Enquanto  $k \leq k_{\text{end}}$ , verificar se a respectiva condição é satisfeita:

$$\|x_{k+1}\|_{G_{\sigma(k)}^{-1}}^2 \leq 1 \text{ ou } \|x_{k+1}\|_{S_{\sigma(k)}^{-1}}^2 \leq 1.$$

i – Se não, pare o processo iterativo;

ii – Se sim, faça  $k := k + 1$  e retorne ao passo I.

III Se  $k > k_{\text{end}}$ , aplique a lei de controle, sendo  $K_{\sigma(k)} = Y_{\sigma(k)} G_{\sigma(k)}^{-1}$  ou  $K_{\sigma(k)} = Y_{\sigma(k)} S_{\sigma(k)}^{-1}$

Calculada a partir da tabela de ganhos construída nos passos anteriores.

## 8 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E RESULTADOS

Neste capítulo, o objetivo é evidenciar a eficiência das formulações do SR-MPC LMI, apresentadas no capítulo 7, bem como aplica-las em problemas práticos de engenharia.

Na seção 8.1, objetivando atestar a eficiência do controle proposto é realizada uma análise comparativa, baseado na resposta no tempo e em índices de desempenhos, entre as formulações apresentadas e as metodologias de controle propostas por Benallouch *et al.* (2014) e Esfahani e Pieper (2019), respectivamente, aplicadas a duas plantas puramente matemáticas.

Os índices de desempenho não intrusivos são um artifício matemático muito difundido na área, para avaliar matematicamente a eficiência de uma determinada ação de controle ou processo. Segundo Shinnars (1998), Ogata (1998), Dorf e Bishop (1998a), quanto mais próximo de zero o respectivo índice for, maior será a eficiência do controle. Este trabalho, faz uso dos seguintes índices; Integral do Quadrado do Erro (*Integral Square Error - ISE*); Integral do valor Absoluto do Erro (*Integral Absolute Error - IAE*); Integral do Quadrado do Erro ao longo do Tempo (*Integral of time Multiplied Square Error - ITSE*); Integral do valor Absoluto do Erro ao longo do Tempo (*Integral Time-weighted Absolute Error - ITAE*).

Na seção 8.2, as estratégias de controle propostas no capítulo 7 são aplicadas em dois problemas de engenharia distintos, no amortecimento de oscilação eletromecânicas de baixa frequência e no controle de posição do pêndulo invertido.

### 8.1 Simulações Numéricas

Nesta Seção, a teoria de controle desenvolvida no capítulo anterior é aplicada em duas plantas, objetivando comparar os resultados numéricos com aqueles obtidos pelas metodologias propostas por Benallouch *et al.* (2014) e Esfahani e Pieper (2019). Em ambos os exemplos, é assumido que a dinâmica do referido sistema é descrita pela interação entre dois subsistemas lineares e são simulados nas mesmas condições apresentados pelo respectivo *benchmarking*.

Para validação do controle proposto, são consideradas duas situações distintas: Na primeira, os estados do sistema estão disponíveis e, portanto, o controle é realizado por meio de uma realimentação de estados (*State Feedback - SF*). Na segunda, os estados do sistema não estão disponíveis e, portanto, é necessário a implementação da realimentação de saída (*Output Feedback - OF*) por intermédio do observador de estados chaveados propostos.

### 8.1.1 Exemplo Numérico I

Visando demonstrar a aplicação da estratégia de controle proposta na seção 7.1, considere o sistema (7.3), onde as matrizes de estados, entrada, perturbação, saída e transição direta a condição inicial são dadas, respectivamente, por (8.1) – (8.4) e (8.5).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,28 & 0,06 \\ 0,10 & 0,14 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,10 \end{bmatrix} \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0,020 \\ 0,030 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

$$C_1 = I_{2 \times 2}, \quad D_1 = 0_{2 \times 1} \quad (8.2)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0,50 & 0,20 \\ -1,20 & 0,40 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0,80 \\ 1,20 \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0,300 \\ 0,400 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

$$C_2 = I_{2 \times 2}, \quad D_2 = 0_{2 \times 1} \quad (8.4)$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1,00 & -1,00 \end{bmatrix}^T \quad (8.5)$$

Visando realizar a análise comparativa entre as metodologias citadas, ambos os modelos foram submetidos a mesma sequência de comutação, exposta na Figura 7, determinada de forma randômica. Neste contexto, é importante ressaltar que, em Benallouch *et al.* (2014) os autores não evidenciaram a sequência de comutação do modelo proposto.

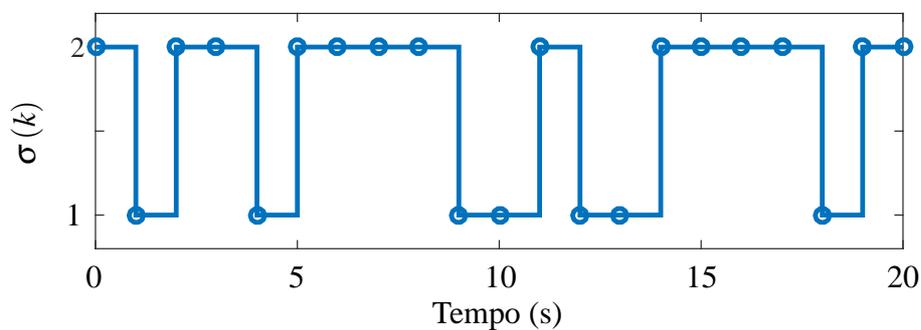


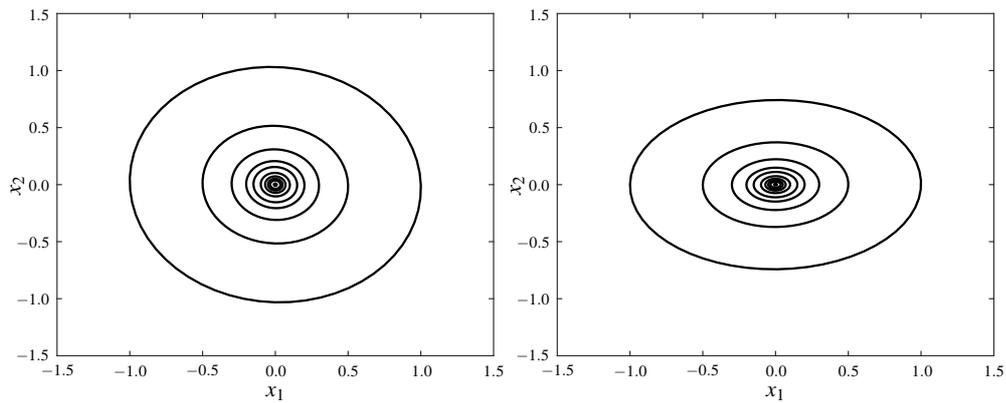
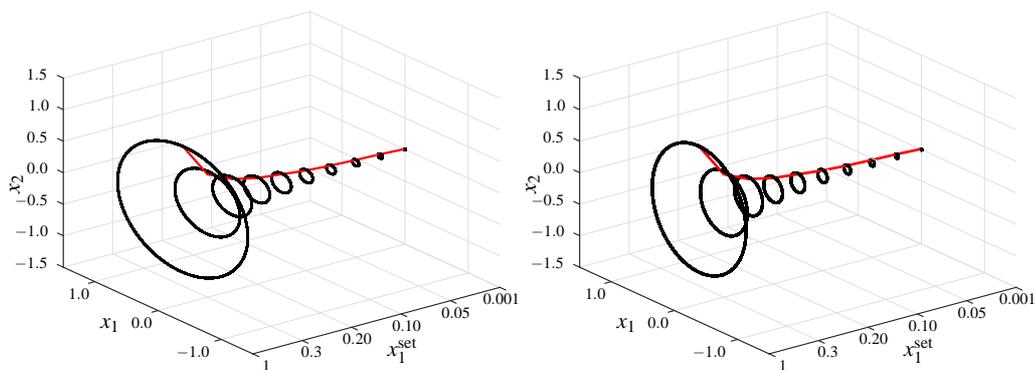
Figura 7 – Sequência de Comutação Para o Exemplo I.

Assumindo a presença de um ruído do tipo gaussiano com desvio padrão de 0,2 e da matriz  $R_w = I_{1 \times 1}$ , o mesmo vetor de excitação  $x_1^{\text{set}}$ , baseado na resposta ao impulso adotado por Wan e Kothare (2002, 2003), restrições impostas ao sinal de entrada e aos estados,  $u_{\text{lim}}^z = 1,0$  e  $x_{\text{lim}}^v = 1,0$ . Sendo, portanto, possível construir a LUT, Tabela 1, para  $\sigma(1)$  e  $\sigma(2)$ .

Tabela 1 – Look-up Table obtidos para o Exemplo I.

$x_1^{\text{set}}$	$\sigma(1)$	$\sigma(2)$
1,00	$K = 1 \times 10^{-6} [0,0045 \ 0,0795]$	$K = [0,6301 \ 0,0001]$
0,50	$K = 1 \times 10^{-6} [0,0009 \ 0,0171]$	$K = [0,6301 \ 0,0003]$
0,30	$K = 1 \times 10^{-6} [0,0011 \ 0,0236]$	$K = [0,6301 \ 0,0002]$
0,20	$K = 1 \times 10^{-6} [0,0150 \ 0,3111]$	$K = [0,6301 \ 0,0002]$
0,15	$K = 1 \times 10^{-6} [0,0006 \ 0,0116]$	$K = [0,6301 \ 0,0005]$
0,10	$K = 1 \times 10^{-6} [0,0109 \ 0,2210]$	$K = [0,6301 \ 0,0001]$
0,07	$K = 1 \times 10^{-6} [0,0033 \ 0,0635]$	$K = [0,6301 \ 0,0002]$
0,05	$K = 1 \times 10^{-6} [0,0142 \ 0,2929]$	$K = [0,6301 \ 0,0007]$
0,035	$K = 1 \times 10^{-6} [0,0332 \ 0,6867]$	$K = [0,6301 \ 0,0005]$
0,001	$K = 1 \times 10^{-6} [0,0386 \ 0,7546]$	$K = [0,6301 \ 0,0045]$

Na Figura 8, são apresentadas as elipsóides de estabilidade referentes a interação dos estados de cada subsistema, construídas a partir da matriz de estabilidade  $G_i^{-1}$  e do vetor de excitação  $x_1^{\text{set}}$ . Além disso, na Figura 9, ilustrada a evolução temporal das referidas elipsóides.

Figura 8 – Elipsóides de Estabilidade 2D para os Subsistema  $\sigma(1)$  e  $\sigma(2)$ .Figura 9 – Elipsóides de Estabilidade 3D para os Subsistema  $\sigma(1)$  e  $\sigma(2)$ .

Analisando as Figuras 8 e 9, é possível observar que, em ambos os casos, as elipsóides convergem para o centro e tendem a origem do plano em regime permanente. Além disso, o vetor de excitação  $X_1^{\text{set}}$  (curva em vermelho) permanece dentro da região delimitada pelas elipsóides de estabilidade, fato que implica na robustez do sistema e conseqüentemente a convergência ótima do algoritmo (KOTHARE *et al.*, 1996; WAN; KOTHARE, 2002).

Na Figura 10, é ilustrado o processo de minimização da função objetivo, como discutido anteriormente, para a solução das LMIs que descrevem o controle proposto é necessário fixar  $\mu$  ou  $\eta$  ao buscar o  $\min \eta$  ou  $\min \mu$ , evitando, assim, problemas com bilinearidade.

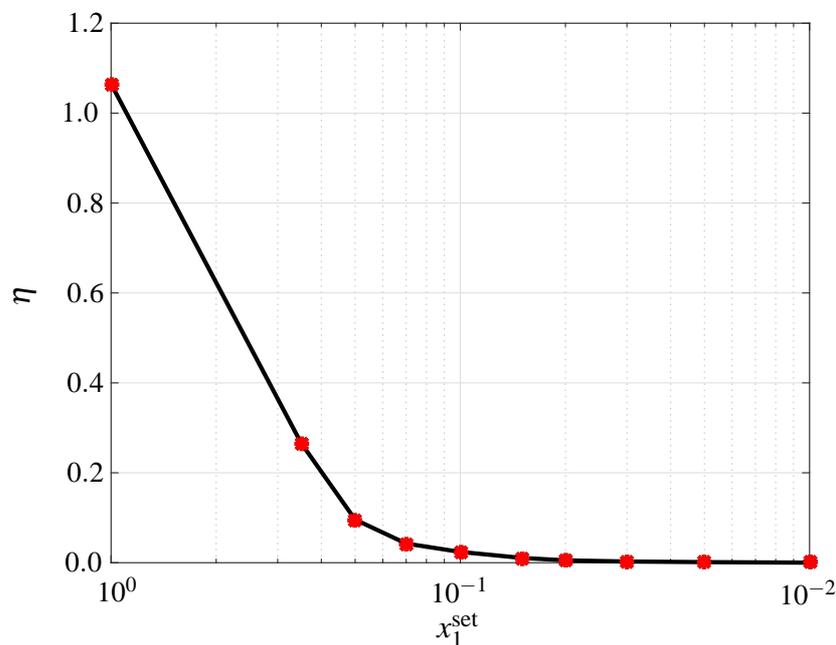


Figura 10 – Minimização de  $\eta$  para  $\mu = \sqrt{0,3}$ .

Analisando as Figuras 8 – 10 e a Tabela 1, em paralelo, é possível observar o panorama detalhado do processo de convergência do algoritmo *offline* de forma detalhada, uma vez que é possível associar cada linha da LUT a cada elemento de  $x_1^{\text{set}}$  a respectiva elipse e constatar a robustez do processo de acordo com os critérios descritos no trabalho de Kothare *et al.* (1996).

Nas Figuras 11 e 12, é possível observar, respectivamente, os estados do sistema e o sinal de controle via realimentação de estados *online* e *offline*. As curvas, em vermelho, correspondem a estratégia de controle apresentada por Benallouch *et al.* (2014), em verde e azul são provenientes da estratégia de controle proposta na seção 7.1, respectivamente *online* e *offline*.

Percebe-se que, em ambas as figuras, a resposta do sistema foi bem próxima do apresentado por Benallouch *et al.* (2014). No entanto, análises posteriores por meio dos índices de desempenho mostram que a estratégia abordada neste trabalho é mais eficiente.

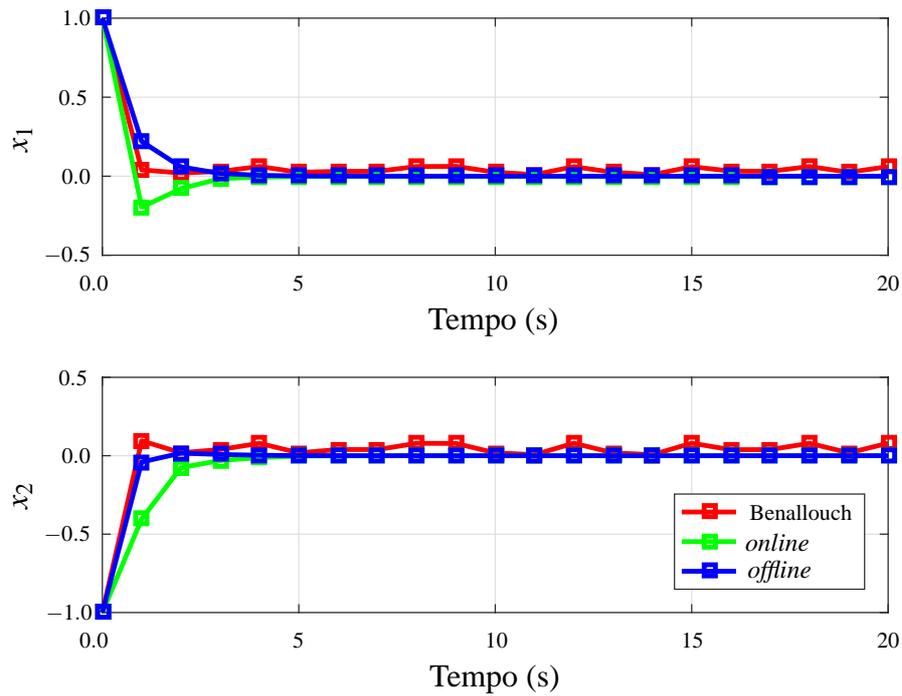


Figura 11 – Comportamento dos Estados via Realimentação de Estados.

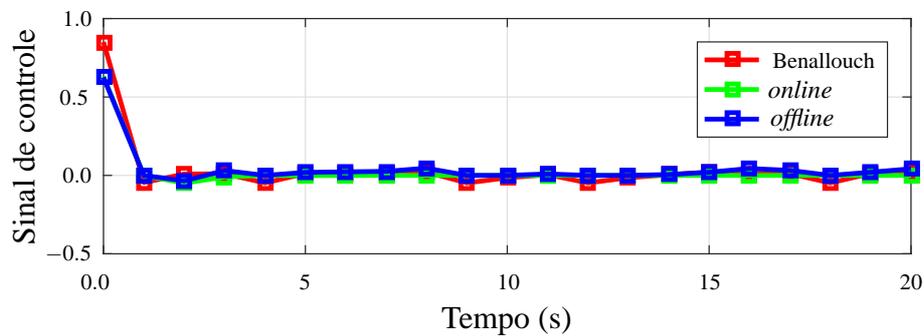


Figura 12 – Sinal de Controle para Realimentação de Estados.

Simulando a segunda condição de implementação, ou seja, não disponibilidade dos estados do sistema para a realimentação de estados, por meio da implementação dos Teoremas 7.1.2 e 7.1.3 são obtidos dois conjuntos de ganhos, para o observador de estados chaveados, dados em (8.6) e (8.7), com uma taxa de decaimento do erro de estimação  $\xi = 0,1$ .

$$L_{\sigma(1)} = \begin{bmatrix} 0,1723 & 0,1196 \end{bmatrix}^T \quad (8.6)$$

$$L_{\sigma(2)} = \begin{bmatrix} -0,0381 & -0,1455 \end{bmatrix}^T \quad (8.7)$$

Nas Figuras 13 e 14, são expostos, respectivamente, os estados estimados do sistema e o sinal de controle via realimentação de saída. Ao analisar as curvas e comparando com a resposta do sistema via realimentação de estados (Figuras 11 e 12), verifica-se que a resposta no tempo do modelo *Controlador-Observador* apresenta menores amplitudes, tanto no comportamento dos estados, quanto no sinal de controle. Vale salientar que o modelo estimado também foi submetido a mesma ação de chaveamento ilustrada na Figura 7.

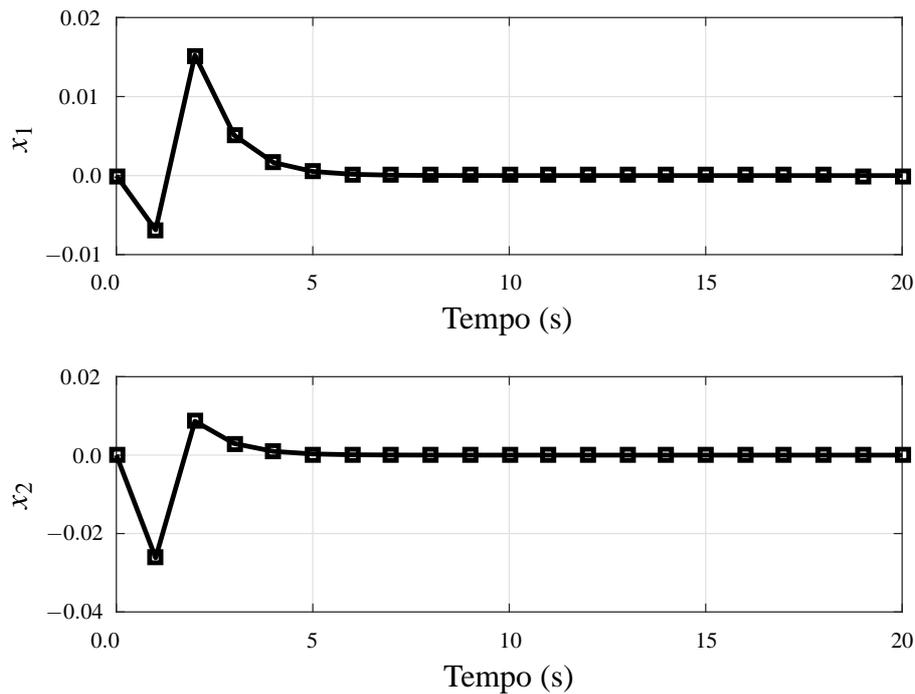


Figura 13 – Comportamento dos Estados via Realimentação de Saída.

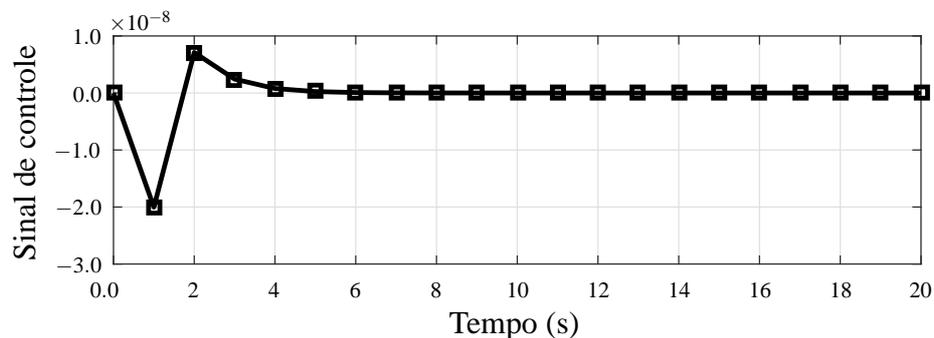


Figura 14 – Sinal de Controle para Realimentação de Saída.

Na Tabela 2, são apresentados os índices de desempenho, obtidos a partir dos modelos implementados; Em vermelho, os índices obtidos a partir do trabalho de Benallouch *et al.* (2014); Em verde e azul, os índices referentes a estratégia proposta para realimentação de estados *online* e *offline* e, em preto, a estratégia proposta para realimentação de saída.

Tabela 2 – Índices de Desempenhos do Exemplo I.

	Benallouch et al. (2014)	Proposto SF <i>online</i>	Proposto SF <i>offline</i>	Proposto OF
IAE	2,6427	1,8251	1,3735	$6,88 \times 10^{-2}$
ISE	1,0930	1,2143	1,0542	$1,08 \times 10^{-3}$
ITAE	1,6755	1,1579	0,5428	$1,91 \times 10^{-1}$
ITSE	0,9432	0,2292	0,0588	$2,55 \times 10^{-3}$

Analisando a referida tabela, é possível observar que os controladores SR-MPC *online* e *offline*, apresentaram melhores resultados quando estes são comparados com os obtidos a partir da estratégia de controle proposta em Benallouch *et al.* (2014), com destaque para a estratégia de controle envolvendo a realimentação de saída.

### 8.1.2 Exemplo Numérico II

Objetivando, demonstrar a aplicação da estratégia de controle proposta na seção 7.2, considere o modelo dado pelo conjunto de equações apresentado em (7.50) e ilustrado na Figura 6, onde as matrizes do modelo são dadas em (8.8) – (8.13) para os subsistemas implementados e a condição inicial dada por (8.14).

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,050 & 0,000 & 0,10 & 0,00 \\ 0,000 & -0,300 & 0,00 & 0,10 \\ -0,125 & 0,125 & 0,00 & 0,00 \\ 0,125 & -0,125 & 0,00 & -0,15 \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,20 \\ 0,80 \\ 0,00 \\ 0,10 \end{bmatrix} \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0,03 \\ 0,02 \\ 0,03 \end{bmatrix} \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \quad E_1 = \begin{bmatrix} -0,03 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix}^T \quad (8.9)$$

$$C_1 = I_{4 \times 4}, \quad D_1 = 0_{4 \times 1} \quad H_1 = 0_{4 \times 1}, \quad F_1 = 0_{4 \times 1} \quad (8.10)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0,150 & 0,060 & 0,30 & -0,06 \\ 0,000 & -0,900 & 0,00 & 0,30 \\ -0,375 & 0,375 & 0,00 & 0,00 \\ 0,375 & -0,375 & 0,00 & -0,45 \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0,60 \\ 2,40 \\ 0,00 \\ 0,30 \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0,03 \\ 0,09 \\ 0,06 \\ 0,15 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} -0,09 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix}^T \quad (8.12)$$

$$C_2 = I_{4 \times 4}, \quad D_2 = 0_{4 \times 1}, \quad H_2 = 0_{4 \times 1}, \quad F_2 = 0_{4 \times 1} \quad (8.13)$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1,00 & -1,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix}^T \quad (8.14)$$

Para realizar uma análise comparativa entre a metodologia de Esfahani e Pieper (2019) e a estratégia de controle proposto, foi realizada uma adaptação das plantas simuladas no *benchmarking*, uma vez que os autores do referido artigo deixam de informar uma serie de parâmetros essenciais para realização das simulações. Deste modo, ambos os modelos foram submetidos as mesmas condições de implementação.

Assumindo um ruído gaussiano com desvio padrão de 1,2 e a matriz de ponderação da entrada exógena dado por  $R_w = I_{1 \times 1}$ ,  $\Lambda = \sin(10k)$  e o mesmo vetor de excitação baseado na resposta ao impulso adotado Wan e Kothare (2002) foi possível construir a LUT (SF) para  $\sigma(1)$  e  $\sigma(2)$ , disponível na Tabela 3 e a sequência de comutação, exposta na Figura 15.

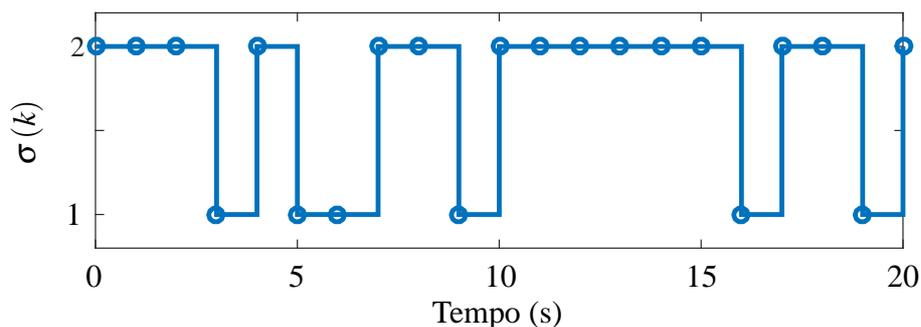
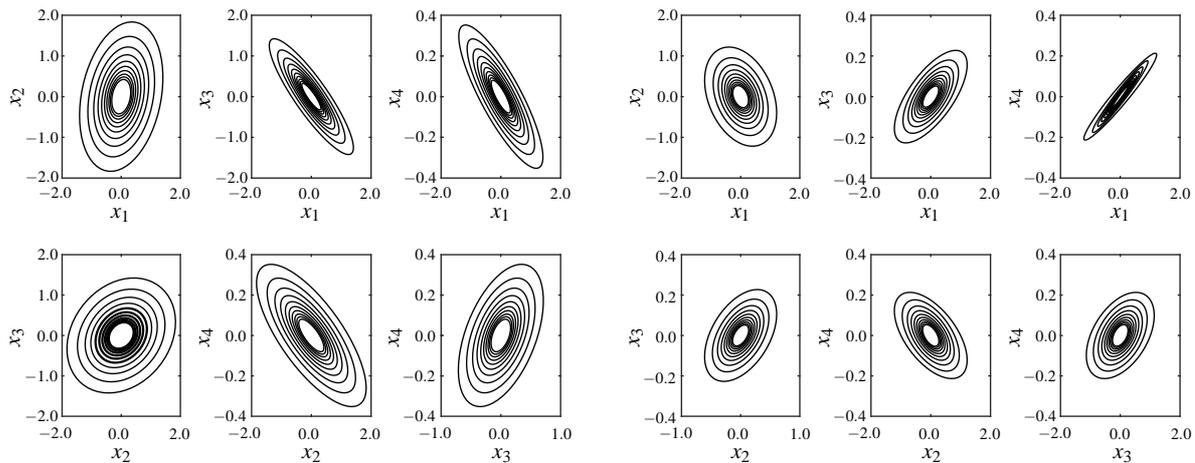


Figura 15 – Sequência de Comutação Para o Exemplo II.

Tabela 3 – Look-up Table obtidos para o Exemplo II.

$x_1^{\text{set}}$	$\sigma(1)$	$\sigma(2)$
1,00	$K = [-0,003 \ 0,365 \ -0,029 \ -0,094]$	$K = [-0,004 \ 0,359 \ -0,029 \ -0,087]$
0,50	$K = [-0,003 \ 0,364 \ -0,029 \ -0,094]$	$K = [-0,004 \ 0,359 \ -0,029 \ -0,087]$
0,30	$K = [-0,003 \ 0,365 \ -0,029 \ -0,094]$	$K = [-0,005 \ 0,359 \ -0,029 \ -0,087]$
0,20	$K = [-0,003 \ 0,365 \ -0,029 \ -0,094]$	$K = [-0,003 \ 0,359 \ -0,029 \ -0,088]$
0,15	$K = [-0,003 \ 0,366 \ -0,028 \ -0,094]$	$K = [-0,003 \ 0,360 \ -0,029 \ -0,088]$
0,10	$K = [-0,003 \ 0,366 \ -0,028 \ -0,094]$	$K = [-0,001 \ 0,360 \ -0,028 \ -0,088]$
0,07	$K = [-0,004 \ 0,366 \ -0,028 \ -0,094]$	$K = [-0,003 \ 0,360 \ -0,028 \ -0,088]$
0,05	$K = [-0,003 \ 0,366 \ -0,028 \ -0,094]$	$K = [-0,003 \ 0,360 \ -0,028 \ -0,088]$
0,035	$K = [-0,004 \ 0,366 \ -0,028 \ -0,094]$	$K = [-0,003 \ 0,360 \ -0,028 \ -0,088]$
0,001	$K = [-0,003 \ 0,366 \ -0,028 \ -0,094]$	$K = [-0,003 \ 0,360 \ -0,028 \ -0,088]$

Nas Figuras 16 e 17 são apresentadas as elipsoides de estabilidade referentes a interação dos estados de cada subsistema, construídas a partir da matriz de estabilidade  $S_i^{-1}$  e o processo de minimização da função objetivo, correspondente ao algoritmo *offline*.

Figura 16 – Elipsoides de Estabilidade 2D para os Subsistema  $\sigma(1)$  e  $\sigma(2)$ .

Conforme Wan e Kothare (2002, 2003), a matriz de estabilidade corresponde a um conjunto elipsoidal no plano composto pela interação dos estados do sistema e tende a origem desse plano em regime permanente a medida que o sistema atinge a estabilidade assintótica, fato esse observado em todas as elipsoides de estabilidade ilustrada na Figura 16.

Nas Figuras 18 e 19, é possível observar, respectivamente, os estados do sistema e o sinal de controle via realimentação de estados. Em ambos os casos, as curvas em vermelho são da estratégia de controle apresentada por Esfahani e Pieper (2019), enquanto as em verde e azul são dos algoritmos *online* e *offline*, respectivamente.

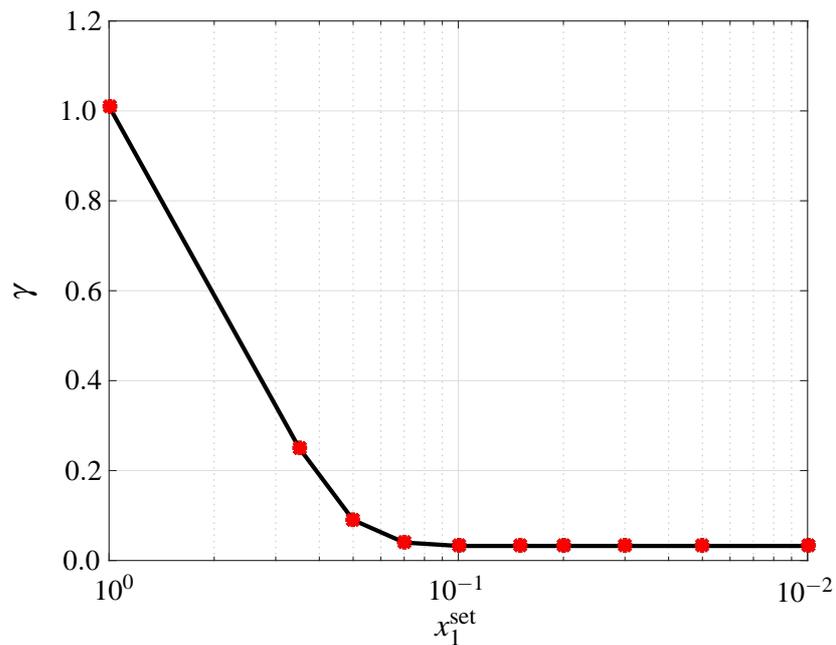


Figura 17 – Minimização de  $\gamma$  para  $\lambda = 0, 1$ .

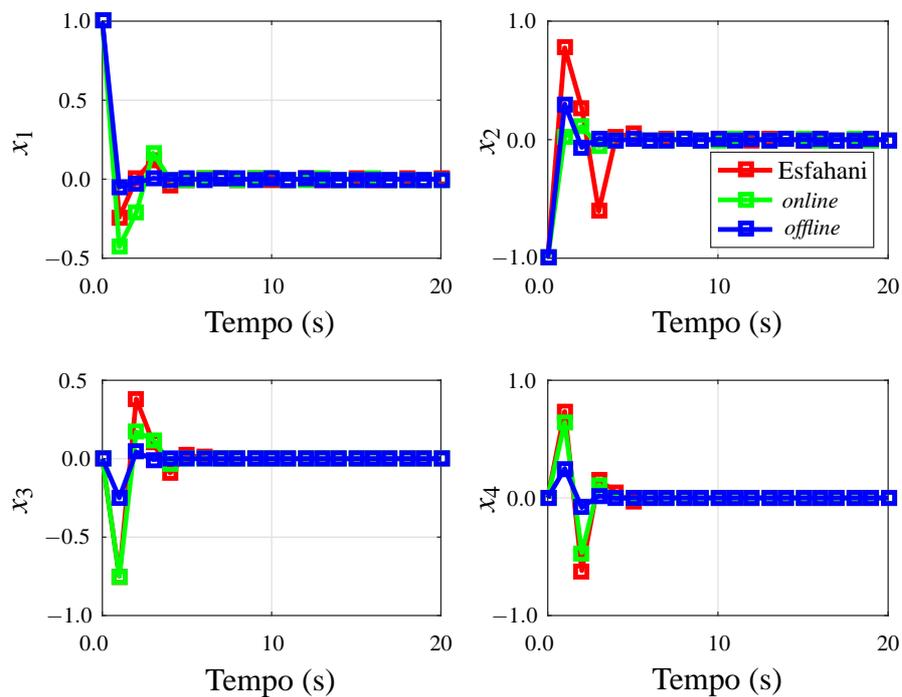


Figura 18 – Comportamento dos Estados via Realimentação de Estados.

Simulando a segunda condição de implementação (OF), são obtidos os ganhos para o observador de estados chaveados, por meio dos Teoremas 7.2.2 e 7.2.3, mostrados em (8.15) e (8.16), sendo que neste caso foi utilizado uma taxa de decaimento do erro de estimação  $\xi = 0, 1$ .

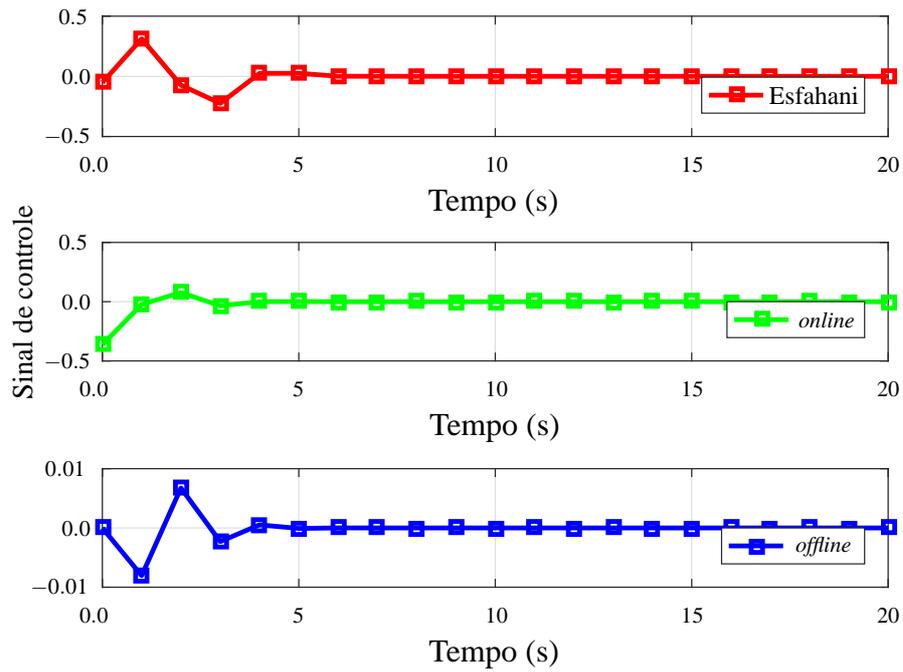


Figura 19 – Sinal de Controle para Realimentação de Estados.

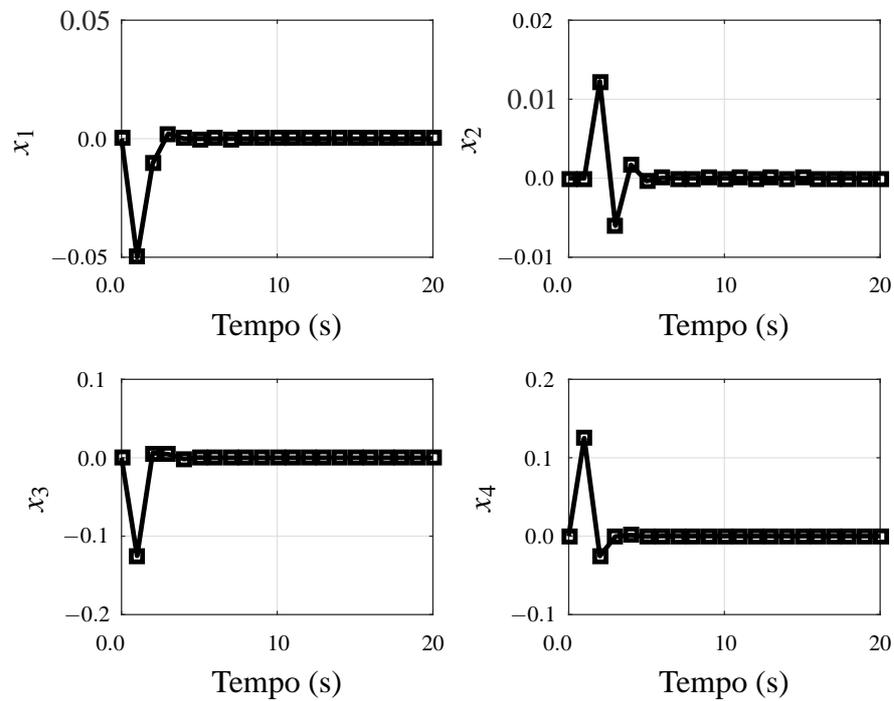


Figura 20 – Comportamento dos Estados via Realimentação de Saída.

$$L_{\sigma(1)} = \begin{bmatrix} -0,0500 & -0,0001 & -0,1249 & 1,1250 \end{bmatrix}^T \quad (8.15)$$

$$L_{\sigma(2)} = \begin{bmatrix} -1,4970 & 0,0139 & -0,3802 & 0,3791 \end{bmatrix}^T \quad (8.16)$$

Nas Figuras 20 e 21, são expostos, respectivamente, os estados estimados do sistema e o sinal de controle via realimentação de saída. Ao analisar estas, é possível inferir que, assim como no Exemplo I, a resposta do conjunto controlador observador também apresentou menores amplitudes, tanto no comportamento dos estados quanto no sinal de controle.

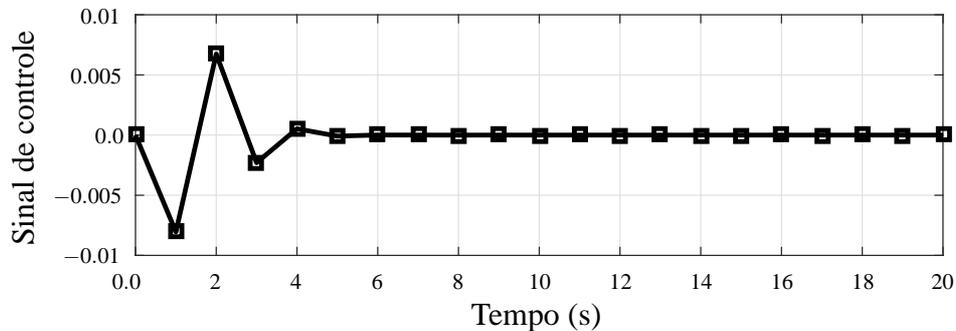


Figura 21 – Sinal de Controle para Realimentação de Saída.

Por fim, é realizado uma análise quantitativa na forma de índices de desempenho não intrusivos da eficiência das quatro disposições apresentadas. Os resultados dessa análise são expostos na Tabela 4. Onde é possível observar que o controladores SR-MPC apresentam melhores resultados quando comparado com os obtidos a partir da estratégia de controle de Esfahani e Pieper (2019), com destaque para a estratégia de controle via realimentação de saída.

Tabela 4 – Índices de Desempenhos do Exemplo II.

	Esfahani e Pieper (2019)	Proposto SF <i>online</i>	Proposto SF <i>offline</i>	Proposto OF
IAE	6,0944	4,3176	2,1117	$3,73 \times 10^{-1}$
ISE	3,7945	2,5193	1,2313	$3,48 \times 10^{-2}$
ITAE	9,5308	5,3803	1,4313	$4,75 \times 10^{-1}$
ITSE	4,2816	1,9404	0,2457	$3,58 \times 10^{-2}$

## 8.2 Aplicações em Plantas Físicas

Nesta seção, o SR-MPC é aplicado a dois problemas distintos de engenharia. O primeiro, é o amortecimento de oscilações eletromecânicas de baixa frequência de um sistema elétrico de potência composto por uma máquina síncrona, e uma eventual carga conectados ao barramento infinito (*Single Machine Infinite Bus - SMIB*) modelado por meio do modelo de sensibilidade a corrente (*Current Sensitivity Model - CSM*) (CARVALHO *et al.*, 2021). O segundo, é o controle de posição de um pêndulo invertido, um sistema mecânico, cuja instabilidade inerente se assemelha ao comportamento oscilatório de diversas situações e problemas práticos como a trajetória de projéteis, braços robóticos, dentre outros, (RIBEIRO, 2007).

### 8.2.1 *Single Machine Infinite Bus*

Sistemas elétricos de potência (*Electric Power System - EPS*) são estruturas complexas envolvendo os processos de geração, transmissão e distribuição elétrica em uma dada região (KUNDUR, 1994). A constante ampliação e interligação desses sistemas têm demandado um aumento dos estudos científicos voltados para a estabilidade, objetivando garantir segurança, confiabilidade e viabilidade financeira para sua implementação, visto que as interconexões e estruturas que compõe os EPSs podem originar desequilíbrios eletromecânicos no torque dos geradores síncronos e possibilitar um ambiente favorável ao surgimento de oscilações de baixa frequência (*Low Frequency Oscillation - LFO*) (KUNDUR, 1994; FORTES *et al.*, 2018).

Na literatura, essas oscilações são classificadas como sendo do tipo interárea, quando ocorrem entre 0,2 Hz e 0,7 Hz ou locais, quando verificadas entre 0,8 Hz e 2,0 Hz. Fenômenos eletromecânicos dessa natureza provocam trocas de potência oscilatória nas linhas de transmissão, que em eventos extremos podem causar perda de sincronismos entre geração e carga e, portanto, ocasionar blecautes (KUNDUR, 1994; THAKALLAPPELLI *et al.*, 2013).

A atenuação, por meios naturais, desse tipo de problema ainda é um desafio recorrente no meio acadêmico e industrial conforme pode ser verificado nos trabalhos de Dey *et al.* (2020), Alshammari e Guesmi (2020), Abdollahi *et al.* (2020), Baek e Kim (2020) e Kamari *et al.* (2020).

Portanto, a operação segura e estável desses sistemas depende do amortecimento dessas oscilações por equipamentos adequados conforme as faixas de frequência em que ocorrem. Normalmente, os modos locais são amortecidos utilizando *Power System Stabilizer - (PSS)* acoplado a *Automatic Voltage Regulator - (AVR)* e no caso dos modos interáreas, o *Power Oscillation damping - (POD)* pode ser utilizado em conjunto com o *Flexible AC Transmission Systems - (FACTS)* (FORTES *et al.*, 2017; FORTES *et al.*, 2018), entre outros equipamentos.

Dentre as diferentes metodologias de controle que podem ser aplicadas ao ajuste dos parâmetros de controle dos dispositivos adicionados aos EPSs, destacam-se três: algoritmos de otimização, abordagem clássica e robusta.

Os algoritmos de otimização, usualmente, aplicados para o controle de LFOs são as meta-heurísticas inspiradas no comportamento social dos animais e insetos. Tal estratégia de controle foi utilizada por Martins *et al.* (2017), que dentre outras heurísticas, aplica o *artificial bee colony - (ABC)* para determinar os parâmetros do *Unified Power Flow Controller - (UPFC)* com a finalidade de estabilizar o *New England System* e o trabalho de Kamari *et al.* (2020) que aplica as meta-heurísticas *Artificial Immune System - (AIS)*, *Evolutionary Programming - (EP)*

e o *Particle Swarm Optimizer* - (PSO) para otimização do coeficiente de torque sincronizante e o amortecimento de um sistema composto por uma máquina síncrona e o barramento infinito. Os trabalhos supracitados empregam meta-heurísticas para sintonizar controladores clássicos como o PID e suas variações.

Dentre as abordagens clássicas, o *Decentralized Modal Control* - (DMCOM), o método dos resíduos e a alocação de polos, implementadas por Chen e Hsu (1987), Yang *et al.* (1998) e Firdaus *et al.* (2020), dentre outras técnicas de controle clássico, são aplicados junto a diversos modelos de atuadores e equipamentos empregados para o controle LFOs locais e interárea.

No contexto do controle robusto é possível citar as pesquisas de Gupta *et al.* (2020), Lakshmi *et al.* (2020) e Carvalho *et al.* (2021). No entanto, os artigos publicados atualmente, não abordam a existência de incertezas na planta, modelagem via subsistemas lineares e a aplicação de controladores discretos como o SR-MPC, dessa forma, este trabalho se planeou a aplicar o SR-MPC LMI ao amortecimento de LFOs em EPSs via CSM.

### 8.2.1.1 Modelagem do SMIB-CSM

Conforme Kundur (1994), o SMIB é um sistema clássico muito difundido na literatura para o estudo de estabilidade de EPSs. No diagrama unifilar do SMIB, Figura 22, observa-se o esquema de distribuição composto por um gerador síncrono, uma carga e o barramento infinito, representando o restante da rede de distribuição elétrica.

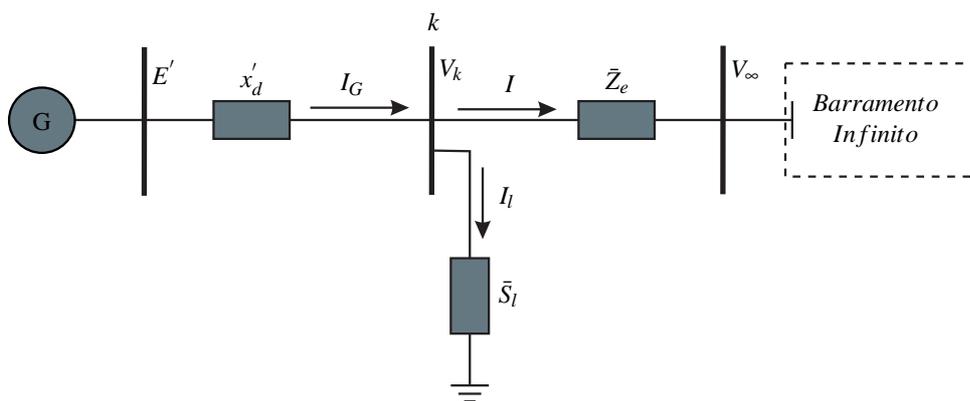


Figura 22 – Diagrama Unifilar do SMIB.

Na Figura 22,  $E'$  e  $V_t$  são respectivamente, a tensão interna e terminal do gerador síncrono.  $V_\infty$  é a tensão no barramento infinito,  $I_G$  é a corrente fornecida pelo gerador e  $x'_d$  a sua reatância transitória de eixo direto.  $I_L$  é a corrente demandada pela carga  $L$ , e  $I$  é a corrente que percorre a linha de transmissão com impedância  $Z_e$ .

Segundo Fortes *et al.* (2020), o CSM é fundamentado na Lei de Kirchhoff das correntes e sua aplicação fornece as equações algébricas do modelo. Um dado EPS modelado via CSM, pode ser expresso pelas equações (8.17)–(8.20).

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J1 & J2 \\ J3 & J4_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B1 \\ B2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta \omega & \Delta \delta & \Delta E'_q & \Delta E_{fd} \end{bmatrix}^T \quad (8.18)$$

$$\Delta u = \begin{bmatrix} \Delta P_M & \Delta V_{ref} & \Delta P_L & \Delta Q_L \end{bmatrix}^T \quad (8.19)$$

$$\Delta z = \begin{bmatrix} \Delta \theta_t & \Delta V_t \end{bmatrix}^T \quad (8.20)$$

As submatrizes  $J1$ ,  $J2$ ,  $J3$  e  $J4_i$  exibidas em (8.17) encontram-se detalhadas em (8.21), (8.22) e (8.23). Sendo que o subíndice  $i$  indica que o referente termo varia com a mudança de carga do sistema, como será discutido mais adiante no trabalho.

$$J1 = \begin{bmatrix} -\frac{D}{M} & -\frac{K1}{M} & -\frac{K2}{M} & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{KA}{T'_{d0}} & -\frac{x_d}{x'_d T'_{d0}} & \frac{1}{T'_{d0}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{T'_r} \end{bmatrix}, \quad J2 = \begin{bmatrix} \frac{K4}{M} & \frac{K3}{M} \\ 0 & 0 \\ \frac{KA}{T'_{d0}} & \frac{KV}{T'_{d0}} \\ 0 & -\frac{K_r}{T'_r} \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

$$J3 = \begin{bmatrix} 0 & R2_G & R1_G & 0 \\ 0 & M2_G & M1_G & 0 \end{bmatrix}, \quad J4_i = \begin{bmatrix} A_{ri} & B_{ri} \\ A_{mi} & B_{mi} \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

$$B1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_r}{T'_r} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -C3_r & -C4_r \\ 0 & 0 & -C3_m & -C4_m \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

Na equação (8.18),  $\Delta x$  são as variáveis de estado do sistema, sendo que  $\Delta \omega$ ,  $\Delta \delta$ ,  $\Delta E'_q$  e  $\Delta E_{fd}$  representam, respectivamente, a velocidade angular e o ângulo interno do rotor, a tensão interna de quadratura, e a tensão de campo do gerador síncrono.

Na equação (8.19),  $\Delta u$  representa o vetor de entrada do sistema, onde  $\Delta P_M$  é a potência de entrada,  $\Delta V_{ref}$  é a tensão de referência do AVR,  $\Delta P_L$  e  $\Delta Q_L$  representam, respectivamente, a potência ativa e reativa drenadas por uma eventual carga  $L$  ligada ao barramento.

Por fim, na Equação (8.20) são representadas as variáveis algébricas do sistema. Estas encontram-se representadas por  $\Delta\theta_t$  e  $\Delta V_t$ , que correspondem, respectivamente, ao ângulo e a magnitude da tensão na barra onde a carga se encontra conectada.

Portanto, o SMIB-CSM no espaço de estados contínuo é expresso por (8.24). Onde,  $A_i = J1 - J2J4_i^{-1}J3$  é a matriz de estados e  $B_i = B1 - J2J4_i^{-1}B2$  matriz de entradas do sistema.

$$\Delta\dot{x} = A_i\Delta x + B_i\Delta u \quad (8.24)$$

A dedução completa do SMIB-CSM pode ser averiguada em detalhes no trabalho de Fortes *et al.* (2020). Nesta dissertação, a estrutura de controle utilizada nas simulações é dada pela realimentação de estados expressa em (8.25) e ilustrada na Figura 23.

$$\Delta x(k+1) = A_{\sigma(k)}\Delta x(k) + B_{V_s}\Delta u_{V_s}(k) + B_{\sigma(k)}\Delta u(k) \quad (8.25)$$

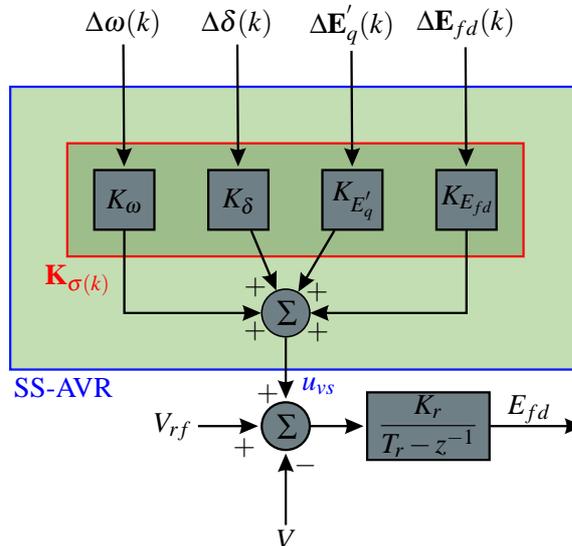


Figura 23 – Diagrama de blocos do SS-AVR.

As matrizes  $A_{\sigma(k)}$  e  $B_{\sigma(k)}$  correspondem aos  $N$  subsistemas que descrevem a dinâmica da planta,  $\Delta u(k)$  passa a representar uma perturbações exógenas ao sistema é a matriz de entrada do AVR (8.26), sendo  $K_r$  e  $T_r$ , respectivamente, o ganho e a constante de tempo do AVR.

$$B_{V_s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{K_r}{T_r} \end{bmatrix}^T \quad (8.26)$$

### 8.2.1.2 Parâmetros do SMIB-CSM

Os parâmetros adotados para simular o controle e amortecimento de LFO's e a variação de carga do sistema SMIB-CSM, podem ser vistos na Tabela 5, são os mesmos dados empregados no trabalho de Fortes *et al.* (2020).

Tabela 5 – Parâmetros de Simulação do SMIB-CSM.

Parâmetros	Valor	Unidade
$H$	5,00	Kgm <sup>2</sup>
$D$	0,00	kW.s/kVA
$T'_{do}$	6,00	s
$T_r$	$1 \times 10^{-3}$	s
$ V_t $	1,00	p.u.
$K_r$	40,0	p.u.
$x'_d$	0,32	p.u.
$x_d$	1,60	p.u.
$x_q$	1,55	p.u.
$r_e$	0,00	p.u.
$x_e$	0,30	p.u.

Neste contexto, é importante ressaltar que nas pesquisas desenvolvidas por Fortes *et al.* (2020), os autores não simulam a variação de carga, restringindo-se ao caso em que a demanda das cargas ativa e reativa do sistema são nulas. Além disso, não discretizam o modelo, pois realizam o controle por realimentação de estados via LQR.

### 8.2.1.3 Projeto de controle

Inicialmente, são calculados os autovalores do sistema em malha aberta mediante variações na potência ativa ( $\Delta P_l$ ) e reativa ( $\Delta Q_l$ ) em tempo contínuo e discreto.

Nas Figuras 24 e 25 são exibidos o comportamento dos polos do sistema em malha aberta, de acordo com as variações de cargas sugeridas (em verde), quando o sistema encontra-se sem carga (polo vermelho) e quando há apenas a demanda de potência reativa no sistema (polo azul). Em ambos casos, as setas indicam a direção do aumento do respectivo tipo de potência.

Analisando os polos do sistema em malha aberta, verifica-se que o sistema abordado é instável para todas as situações envolvendo variações de carga que ocorreram no intervalo de 0,0 a 1,0 p.u., uma vez que os autovalores se encontram localizados no semiplano direito do plano  $S$  e fora do círculo de raio unitário no plano  $Z$ .

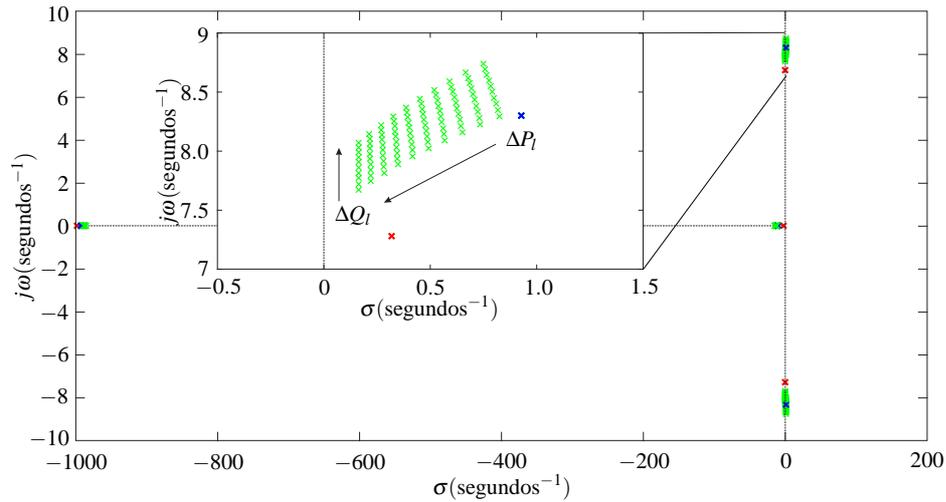


Figura 24 – Polos de malha aberta no plano S.

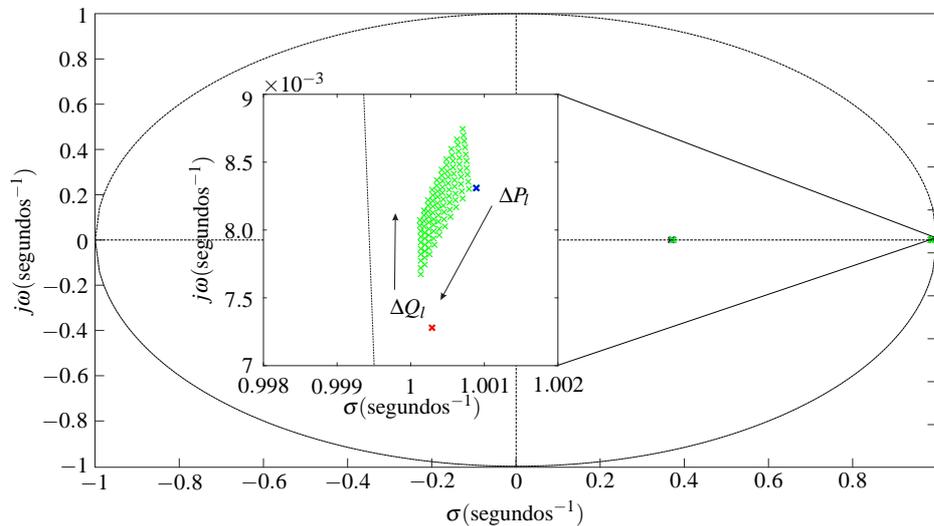


Figura 25 – Polos de malha aberta no plano Z.

Objetivando controlar o SMBI-CSM, via realimentação de estados como exposto no diagrama de blocos 23, foi implementado o SR-MPC, proposto na seção 7.1, por intermédio do algoritmo *online*. Para simulação, foram consideradas um conjunto de incertezas, cujo modelo comutado resultante é definido por quatro subsistemas lineares, ou seja  $\sigma(k) \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

A faixa de incertezas simulada foi de  $0,95 \leq \Delta P_l \leq 1,05$  p.u. e  $0,95 \leq \Delta Q_l \leq 1,05$  p.u.. Tal variação de 10% foi determinada com intuito de manter a integridade do modelo e simular uma situação de sobrecarga, isto é, quando o sistema demanda uma potência acima do previsto em projeto (FORTES *et al.*, 2016; FORTES, 2016).

Discretizando o SMBI-CSM por avanço de Euler com período de amostragem de  $1ms$ . Os subsistemas simulados são dados pelas matrizes (8.27) – (8.34).

$-\Delta S_L(0,95 \text{ p.u.}, 0,95 \text{ p.u.})$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1,00000 & -0,00020 & -0,00020 & -0,00001 \\ 0,37700 & 1,00000 & -0,00001 & -0,00001 \\ -0,00010 & -0,00020 & 0,99850 & 0,00010 \\ 0,30570 & 1,39390 & -10,19510 & 0,36720 \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.00010 & -0.00001 & -0.00001 & 0.00001 \\ 0.00001 & -0.00001 & -0.00001 & 0.00001 \\ -0.00001 & 0.00250 & -0.00010 & 0.00061 \\ 0.00001 & 25.27370 & -0.08630 & 7.05330 \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

$-\Delta S_L(0,95 \text{ p.u.}, 1,05 \text{ p.u.})$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1,00000 & -0,00020 & -0,00020 & -0,00001 \\ 0,37700 & 1,00000 & -0,00001 & -0,00001 \\ -0,00010 & -0,00030 & 0,99440 & 0,00010 \\ 1,5674 & 7,13990 & -52,36020 & 0,36420 \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.00010 & -0.00001 & -0.00001 & 0.00001 \\ 0.00001 & -0.00001 & -0.00001 & 0.00001 \\ -0.00001 & 0.00250 & -0.00010 & 0.00034 \\ 0.00001 & 126.1375 & -0.43650 & 36.2123 \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

$-\Delta S_L(1,05 \text{ p.u.}, 0,95 \text{ p.u.})$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1,00000 & -0,00020 & -0,00020 & -0,00001 \\ 0,37700 & 1,00000 & -0,00001 & -0,00001 \\ 0,00010 & 0,00020 & 0,99450 & 0,00010 \\ 1,5674 & 5,63560 & -52,28140 & 0,36420 \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0.00010 & -0.00001 & -0.00001 & 0.00001 \\ 0.00001 & -0.00001 & -0.00001 & 0.00001 \\ -0.00001 & 0.01220 & -0.00010 & 0.00033 \\ 0.00001 & 126.1379 & 0.08330 & 35.1923 \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

$-\Delta S_L(1,05 \text{ p.u.}, 1,05 \text{ p.u.})$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1,00000 & -0,00020 & -0,00020 & -0,00001 \\ 0,37700 & 1,00000 & -0,00001 & -0,00001 \\ 0,00010 & 0,00020 & 0,99430 & 0,00010 \\ 1,27320 & 5,80020 & -53,77500 & 0,36420 \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0.00010 & -0.00001 & -0.00001 & 0.00001 \\ 0.00001 & -0.00001 & -0.00001 & 0.00001 \\ -0.00001 & 0.01220 & -0.00010 & 0.00034 \\ 0.00001 & 126.1297 & 0.08450 & 36.1999 \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

As matrizes de ponderação e entrada exógena, saída e transição direta são dadas por:  $R_w = 0,5I_{1 \times 1}$ ,  $W_{\sigma(k)} = [1, 0, 0, 0]^T$ ,  $C_{\sigma(k)} = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$ ,  $D_{\sigma(k)} = 0$  e as restrições de entrada e estados,  $u_{lim}^{z_d} = 0,2 \text{ p.u.}$  e  $x_{lim}^{v_d} = 0,06 \text{ rad/s}$ , respectivamente.

Objetivando atestar a eficiência da estratégia de controle abordada, foi simuladas perturbações do tipo exógena sobre  $\Delta u$ , no momento correspondente á 0,02 segundos, na forma de uma elevação de 5% da potência mecânica de entrada sobre o eixo do gerador, simulando um pequeno ajuste na geração (CARVALHO *et al.*, 2021; FORTES *et al.*, 2020).

As Figuras 26 e 27, apresentam respectivamente, a ação de comutação dependente dos estados obtidas por meio da regra de comutação (7.6) e o sinal de controle proveniente da implementação do Teorema 7.1.1. Analisando-as é possível observar como a ação de comutação e o sinal de controle atuam em conjunto para manter o sistema estável mediante a perturbação.

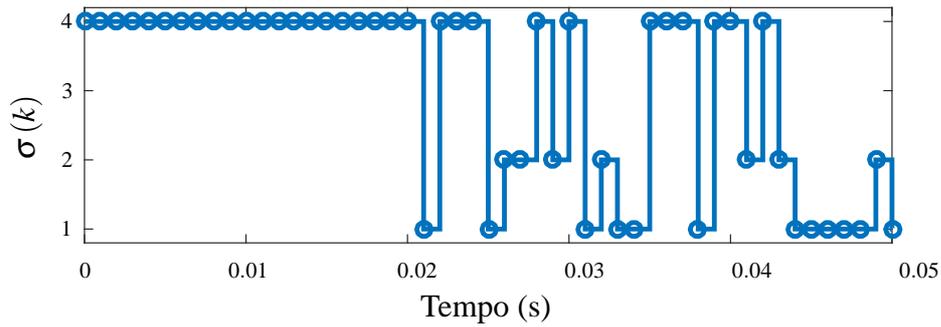


Figura 26 – Sequência de Comutação Para o SMIB-CSM.

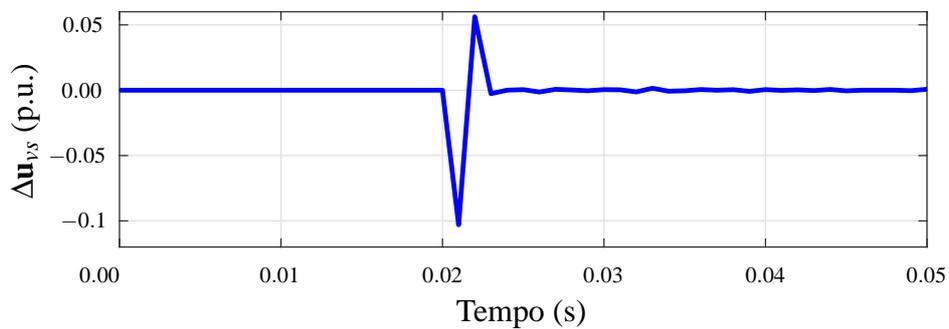


Figura 27 – Sinal de Controle Aplicado ao SMIB-CSM.

Na Figura 28, são exibida as variações da velocidade angular do eixo do gerador, ao analisa-la é possível constatar que as restrições previamente definidas não foram violadas em momento algum do processo iterativo. Vale ressaltar que, se submetido ao mesmo tipo de perturbação em malha aberta ou realimentação unitária, o sistema simulado passa a apresentar oscilações crescentes e torna-se instável (CARVALHO *et al.*, 2021; FORTES *et al.*, 2020).

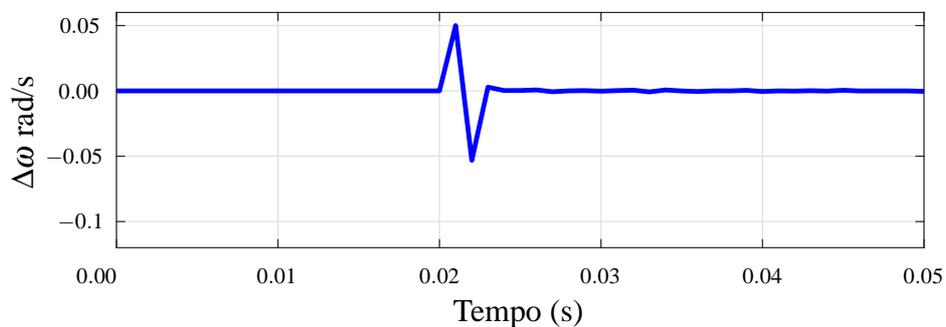


Figura 28 – Velocidade Angular do Eixo do Gerador.

## 8.2.2 Pêndulo Invertido

O pêndulo invertido é um sistema físico instável e não linear composto por uma haste em forma de barra cilíndrica em posição vertical, que pode se movimentar em torno de um ponto fixo, alocado sobre um carro que se desloca em um trilho horizontal. Tal modelo é muito difundido no meio acadêmico uma vez que, é possível aproximá-lo a diversos problemas reais, como a posição de um foguete na fase de lançamento, por exemplo, (OGATA, 2011).

A análise do modelo matemático do pêndulo invertido pode ser aplicada a fim de solucionar problemas relacionados a outros sistemas físicos de comportamento similar, como: Um helicóptero transportando uma carga suspensa por um cabo, braços robóticos, ação de caminhar do ser humano, dentre outros (CARVALHO *et al.*, 2020; SILVA, 2013).

Tendo em vista o fato de que a planta clássica do pêndulo invertido está vinculada ao modelo matemático de inúmeros problemas, é de fundamental importância que sejam realizados estudos constantes a respeito deste sistema físico. A característica dinâmica de instabilidade do pêndulo invertido possibilita que seu controle seja feito por meio de técnicas clássicas, ótimas e robustas (MAGDY *et al.*, 2019; CHAWLA; SINGLA, 2019).

### 8.2.2.1 Modelagem do Pêndulo Invertido

Conforme Teixeira *et al.* (2000) e Ma *et al.* (1998) o modelo não linear de um pêndulo invertido sobre um carro, Figura 29, pode ser descrito pelas equações (8.35).

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \left[ -f_1(M+m)x_2 - m^2 l^2 x_2^2 (\text{sen } x_1) \cos x_1 \right. \\
 &\quad \left. + f_0 m l x_4 \cos x_1 + (M+m) m g l (\text{sen } x_1) \right. \\
 &\quad \left. - m l (\cos x_1) u \right] \frac{1}{\Delta} \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= \left[ f_1 m l x_2 \cos x_1 + (J + m l^2) m l x_2^2 (\text{sen } x_1) \right. \\
 &\quad \left. - f_0 (J + m l^2) x_4 - m^2 g l^2 (\text{sen } x_1) \cos x_1 \right. \\
 &\quad \left. + (J + m l^2) u \right] \frac{1}{\Delta}
 \end{aligned} \tag{8.35}$$

Onde  $\Delta = [(M+m)(J + m l^2) - m^2 l^2 \cos^2 x_1]$ ,  $x_1$  é o ângulo do pêndulo em relação ao eixo vertical,  $x_2$  é a velocidade angular do pêndulo,  $x_3$  é o deslocamento do carro, e  $x_4$  é a velocidade do carro (AGUIRRE, 2007; MA *et al.*, 1998).

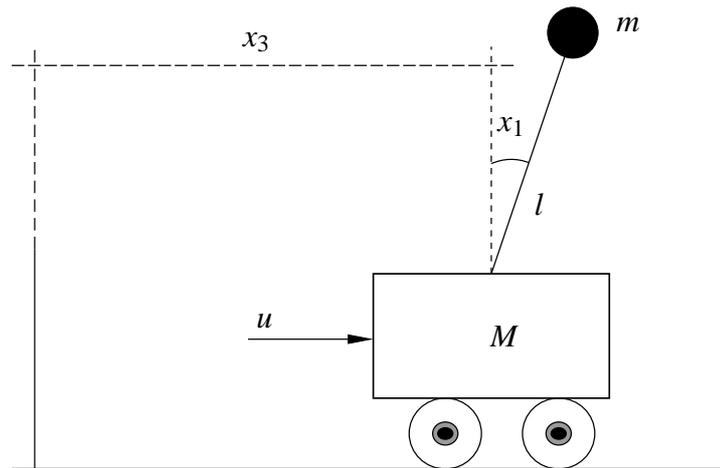


Figura 29 – Pêndulo Invertido.

Neste contexto, salienta-se que a dedução completa do modelo não linear, bem como o processo de linearização em torno de um ponto de operação podem ser conferidas em detalhes em Teixeira *et al.* (2000) e Ogata (2011), respectivamente.

#### 8.2.2.2 Parâmetros do Pêndulo Invertido

Os parâmetros adotados para simular o pêndulo invertido são expostos Tabela 6.

Tabela 6 – Parâmetros de Simulação do Pêndulo Invertido.

Parâmetros	Valor	Unidade
$M$	1,3282	$Kg$
$m$	0,22	$Kg$
$f_0$	22,915	$N/(m/s)$
$f_1$	0,007056	$N/(rad/s)$
$J$	0,004963	$(Kgm^2)$
$g$	9,81	$(m/s^2)$
$l$	0,304	$m$
$T$	0,1	$s$

Os parâmetros dispostos na tabela são:  $M$  a massa do carro sob o qual o pêndulo encontra-se montado;  $m$  é a massa da haste e do pêndulo;  $f_0$  é o coeficiente de atrito do carro;  $f_1$  é o coeficiente de atrito do pêndulo;  $J$  é o momento de inércia do pêndulo em torno do seu centro de massa;  $g$  é a aceleração da gravidade;  $l$  é o comprimento da haste;  $T$  é o tempo de amostragem.

### 8.2.2.3 Projeto de controle

Objetivando realizar o controle de posição do pêndulo invertido, via realimentação de estados nas mesmas condições de projeto de Carvalho *et al.* (2020), foi implementado o SR-MPC, proposto na seção 7.2, por intermédio do algoritmo *offline*. Para simulação, foram considerada a linearização em subsistemas em função do ângulo do pêndulo em relação ao eixo vertical, sendo os subsistemas simulados dados respectivamente pelas equações (8.36)–(8.43).

– $x_1$  em torno de 0 rad

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1,1418 & 0,1032 & 0,0 & 0,1383 \\ 2,8444 & 1,1111 & 0,0 & 2,2497 \\ -0,0040 & -0,0001 & 1,0 & 0,0485 \\ -0,0643 & -0,0033 & 0,0 & 0,1848 \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0,0060 \\ -0,0982 \\ 0,0022 \\ 0,0356 \end{bmatrix} \quad W_1 = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix} \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix} \quad G_1 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \end{bmatrix} \quad C_1 = \text{diag}(0, 0, 1, 0) \quad (8.38)$$

$$D_1 = 0_{4 \times 1} \quad H_1 = 0_{4 \times 1}, \quad F_1 = 0_{4 \times 1} \quad (8.39)$$

– $x_1$  em torno de  $\pm \pi/3$  rad

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1,1075 & 0,1022 & 0,0 & 0,0650 \\ 2,1515 & 1,0785 & 0,0 & 1,0668 \\ -0,0051 & -0,0002 & 1,0 & 0,0513 \\ -0,0840 & -0,0047 & 0,0 & 0,2156 \end{bmatrix} \quad (8.40)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -0,0028 \\ -0,0466 \\ 0,0021 \\ 0,0342 \end{bmatrix} \quad W_2 = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \end{bmatrix} \quad C_2 = \text{diag}(0, 0, 1, 0) \quad (8.42)$$

$$D_2 = 0_{4 \times 1} \quad H_2 = 0_{4 \times 1}, \quad F_2 = 0_{4 \times 1} \quad (8.43)$$

A condição inicial é dada por  $x(0) = [0,96\ 0\ 0\ 0]^T$ , o que equivale à afirmar que no início do processo de controle o pêndulo invertido encontra-se a aproximadamente  $55^\circ$  do ponto de equilíbrio e a posição do carro, sobre o qual esta montado, é adotada como sendo 0 metros.

Considere ainda, um ruído gaussiano com desvio padrão de 1,0 e a matriz de ponderação da entrada exógena dado por  $R_w = I_{1 \times 1}$ ,  $\Lambda = \sin(10k)$  e o mesmo vetor de excitação adotado por Carvalho *et al.* (2020) para implementação do RMPC LPV ao problema do pêndulo invertido.

Nas Figuras 30 e 31 é possível observar a evolução do processo de otimização para o SR-MPC *offline* para os dois subsistemas simulados, onde a medida que o processo entra em regime permanente, pêndulo em equilíbrio, as elipsóides de estabilidade tendem a origem do plano formado pela interação entres os estados.

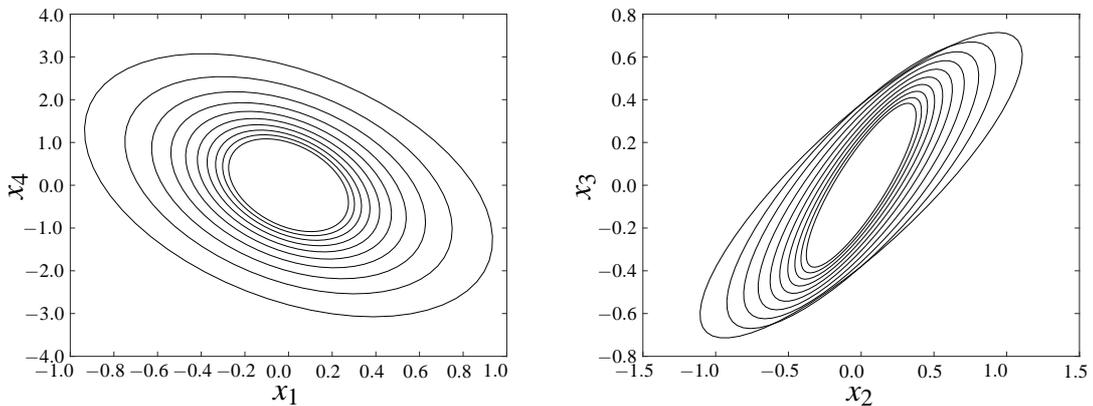


Figura 30 – Elipsóides de Estabilidade 2D para os Subsistema  $\sigma(1)$ .

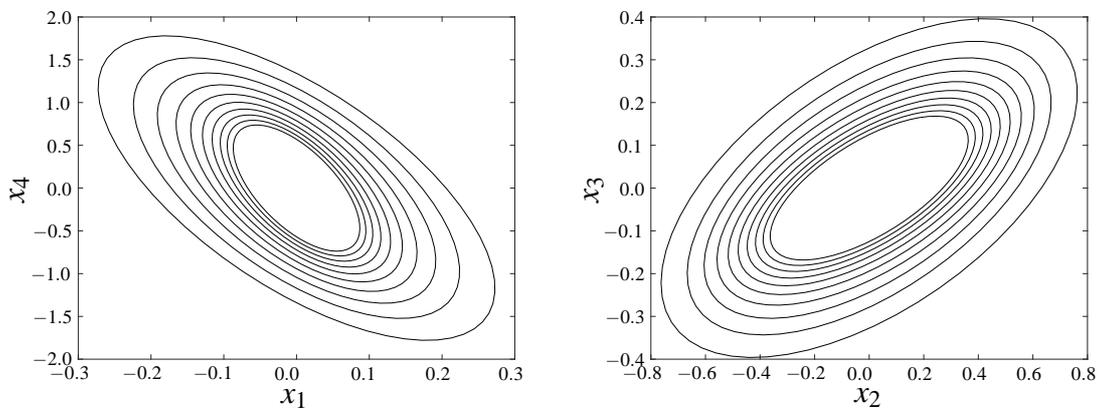


Figura 31 – Elipsóides de Estabilidade 2D para os Subsistema  $\sigma(2)$ .

Na Figura 32, têm-se o comportamento dos estados do pêndulo invertido, nela percebe-se que o sistema estabiliza por completo em torno dos 0,5 segundos. Também pode-se observar que ambos os estados apresentam um comportamento oscilatório proveniente da perturbação exógena, no entanto a atuação da ação de comutação, Figura 33, em conjunto com o sinal de controle, Figura 34, obtido por meio dos ganhos de realimentação de estados previamente armazenados na Tabela 7, foi capaz de manter o sistema estável.

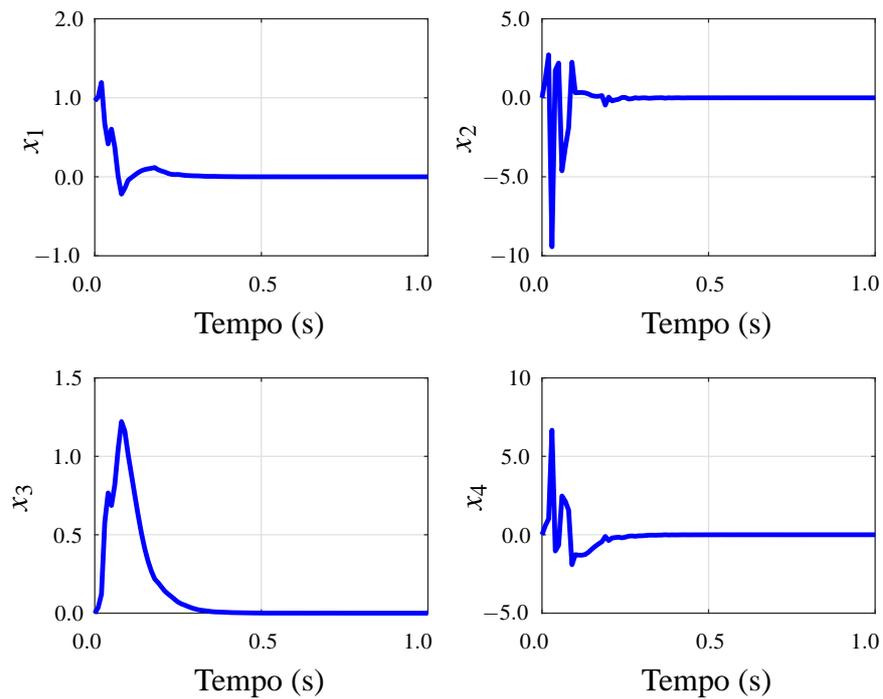


Figura 32 – Comportamento do Pêndulo Invertido via Realimentação de Saída.

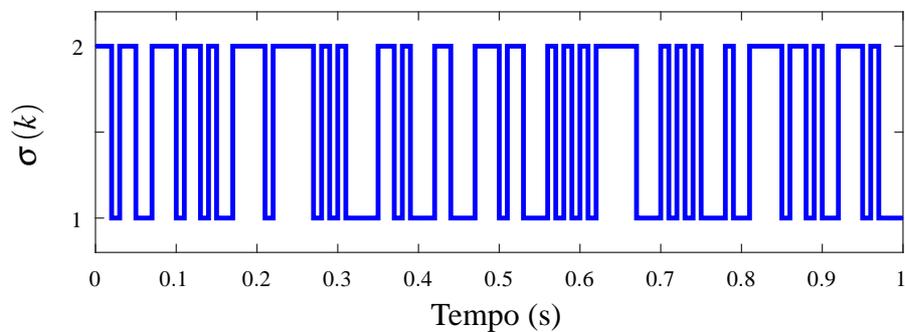


Figura 33 – Sequência de Comutação Para o Pêndulo Invertido.

Tabela 7 – Look-up Table obtidos para o Pêndulo Invertido.

$x_1^{\text{set}}$	$\sigma(1)$	$\sigma(2)$
1,00	$K = [74,432 \ 16,269 \ 11,310 \ 32,241]$	$K = [34,531 \ 12,513 \ -27,861 \ 8,025]$
0,50	$K = [75,611 \ 16,376 \ 11,101 \ 32,495]$	$K = [32,156 \ 11,811 \ -30,266 \ 7,089]$
0,30	$K = [77,184 \ 16,533 \ 10,984 \ 32,777]$	$K = [30,191 \ 11,290 \ -31,948 \ 6,388]$
0,20	$K = [78,911 \ 16,727 \ 11,104 \ 33,163]$	$K = [27,979 \ 10,745 \ -33,521 \ 5,685]$
0,15	$K = [80,405 \ 16,884 \ 11,256 \ 33,520]$	$K = [26,454 \ 10,293 \ -34,901 \ 5,073]$
0,10	$K = [81,505 \ 17,007 \ 11,429 \ 33,839]$	$K = [25,367 \ 9,892 \ -36,134 \ 4,506]$
0,07	$K = [82,501 \ 17,127 \ 11,618 \ 34,134]$	$K = [24,012 \ 9,415 \ -37,328 \ 3,864]$
0,05	$K = [83,506 \ 17,261 \ 11,853 \ 34,436]$	$K = [22,531 \ 8,853 \ -38,548 \ 3,143]$
0,035	$K = [84,028 \ 17,315 \ 11,922 \ 34,628]$	$K = [21,154 \ 8,260 \ -39,784 \ 2,389]$
0,001	$K = [84,413 \ 17,347 \ 12,019 \ 34,798]$	$K = [19,921 \ 7,670 \ -41,038 \ 1,631]$

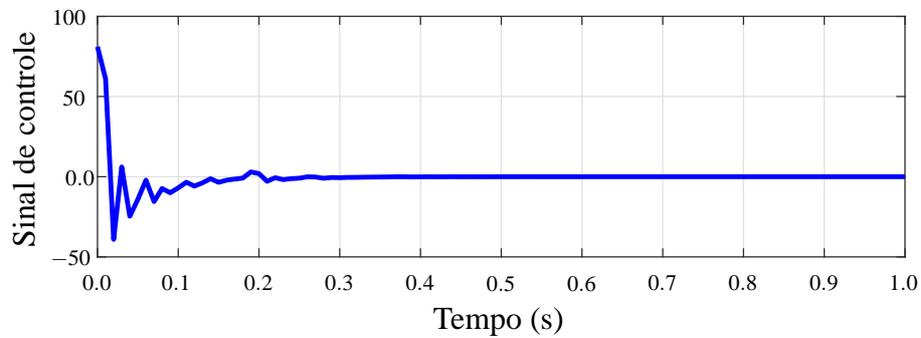


Figura 34 – Sinal de Controle Aplicado ao Pêndulo Invertido.

## 9 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação, foi proposta uma metodologia de controle preditivo robusto baseado em modelo aplicado a sistemas lineares discretos sujeitos a comutação, para dois modelos de incertezas, ambos submetidos a perturbação exógena limitada em norma.

Dessa forma, foram formulados teoremas referentes a síntese do controle e do respectivo observador de estados, ambos projetados via desigualdades matriciais lineares. Além disso, o controle proposto foi implementado nas disposições *online* e *offline* em duas plantas puramente matemáticas e em dois problemas práticos de engenharia.

Objetivando determinar quais estratégias de controle apresentadas (realimentação de estados ou realimentação de saída) via *Switching Robust Model Predictive Control (SR-MPC)* são mais eficientes, foram realizadas uma série de análises comparativas entre os modelos propostos e *benchmarks*. Vale destacar que, dentre as características analisadas, são dadas ênfases nas respostas no tempo dos sistemas sob perturbações do tipo gaussiana, índices de desempenho não intrusivos e na análise de robustez via elipsoides de estabilidade.

Diante dos resultados obtidos, verificou-se que as estratégias de controle propostas, apresentaram desempenhos melhores que a metodologia de ambos os *benchmarks* em todos os exemplos e casos simulados, com destaque para a topologia do controle *offline* via realimentação de saída. Quando aplicado aos problemas físicos do SMIB-CSM e Pêndulo Invertido, as metodologias propostas se mostraram promissoras sendo capaz de estabilizar de forma eficiente as respectivas plantas, atendendo de modo satisfatório os critérios de projeto.

Para trabalhos futuros, há possibilidade de desenvolver pesquisas tanto no âmbito de modelagem e simulação, quanto para aplicações em bancadas experimentais. No contexto teórico, objetiva-se desenvolver estudos envolvendo modelagem do controle proposto para sistemas comutados via linearização LPV. No contexto experimental, é possível aplicar a metodologia desenvolvida no controle de conversores eletromagnéticos de potência, *Buck* e *Boost*.

## REFERÊNCIAS

- ABDOLLAHI, M.; CANDELA, J. I.; ROCABERT, J.; ELSAHARTY, M. A.; RODRIGUEZ, P. Novel analytical method for dynamic design of renewable SSG SPC unit to mitigate low-frequency electromechanical oscillations. **IEEE Transactions on Power Electronics**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 35, n. 7, p. 7532–7544, jul. 2020.
- AGUIRRE, L. **Enciclopédia de automática (vol. 1): controle e automação**. [S.l.]: Blucher, 2007. ISBN 9788521207719.
- ALSHAMMARI, B. M.; GUESMI, T. New chaotic sunflower optimization algorithm for optimal tuning of power system stabilizers. **Journal of Electrical Engineering & Technology**, Springer Science and Business Media LLC, v. 15, n. 5, p. 1985–1997, jun. 2020.
- BABAYOMI, O.; ZHANG, Z.; LI, Y.; KENNEL, R. Adaptive predictive control with neuro-fuzzy parameter estimation for microgrid grid-forming converters. **Sustainability**, MDPI AG, v. 13, n. 13, p. 7038, jun. 2021.
- BAEK, J.-O.; KIM, S. Detection and analysis of electromechanical oscillation in power systems with low-sampled data using modal analysis methods. **Journal of Electrical Engineering & Technology**, Springer Science and Business Media LLC, v. 15, n. 5, p. 1999–2006, jun. 2020.
- BARZEGARKHOO, R.; KHAN, S. A.; SIWAKOTI, Y. P.; AGUILERA, R. P.; LEE, S. S.; KHANA, M. N. H. Implementation and analysis of a novel switched-boost common-ground five-level inverter modulated with model predictive control strategy. **IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), p. 1–1, mar. 2021.
- BENALLOUCH, M.; SCHUTZ, G.; FIORELLI, D.; BOUTAYEB, M.  $H_\infty$  model predictive control for discrete-time switched linear systems with application to drinking water supply network. **Journal of Process Control**, Elsevier BV, v. 24, n. 6, p. 924–938, jun. 2014.
- BOYD, S.; El Ghaoui, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. v. 15. (Studies in Applied Mathematics, v. 15). ISBN 0-89871-334-X.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex optimization**. Cambridge, UK New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN 0521833787.
- BREZINSKI, C.; ZAGLIA, M. R. A schur complement approach to a general extrapolation algorithm. **Linear Algebra and its Applications**, Elsevier BV, v. 368, p. 279–301, jul. 2003.
- BRIAT, C. Introduction to lpv systems. **Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems**, Springer, jan. 2015.
- CAMACHO, E. F. **Model predictive control in the process industry : with 89 figures**. London: Springer London, 1995. ISBN 978-1-4471-3008-6.
- CAMACHO, E. F. **Model predictive control**. Berlin New York: Springer, 1999. ISBN 3-540-76241-8.
- CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. **Robust Model Predictive Control**. [S.l.]: Springer, 2007. ISBN 978-1-85233-694-3.

- CAMPO, P. J.; MORARI, M. Robust model predictive control. In: **1987 American Control Conference**. [S.l.: s.n.], 1987. p. 1021–1026.
- CAMPO, P. J.; MORARI, M. Model predictive optimal averaging level control. **AICHE Journal**, Wiley, v. 35, n. 4, p. 579–591, abr. 1989.
- CARVALHO, L.; COSTA, M. V. S.; LIMA, W. M.; FORTES, E. V. An off-line output feedback RMPC-LPV applied to an inverted pendulum using relaxed LMI procedures. In: **Anais do Congresso Brasileiro de Automática 2020**. [S.l.]: sbabra, 2020.
- CARVALHO, L.; REZENDE, J. C.; COSTA, M. V. S.; FORTES, E. V.; H., M. L. Robust model predictive control via LMIs applied for damping low frequency electromechanical oscillations in power systems. In: **International Conference on Industry Applications 2021**. [S.l.]: Induscon, 2021.
- CHAWLA, I.; SINGLA, A. System identification of an inverted pendulum using adaptive neural fuzzy inference system. In: YADAV, N.; YADAV, A.; BANSAL, J. C.; DEEP, K.; KIM, J. H. (Ed.). **Harmony Search and Nature Inspired Optimization Algorithms**. Singapore: Springer Singapore, 2019. p. 809–817. ISBN 978-981-13-0761-4.
- CHEN, C.-L.; HSU, Y.-Y. Coordinated synthesis of multimachine power system stabilizer using an efficient decentralized modal control (DMC) algorithm. **IEEE Power Engineering Review**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), PER-7, n. 8, p. 32–33, ago. 1987.
- CHEN, C. T. **Linear system theory and design**. New York: Oxford University Press, 1999. ISBN 0195117778.
- CLARKE, D.; MOHTADI, C.; TUFFS, P. Generalized predictive control - part I. the basic algorithm. **Automatica**, Elsevier BV, v. 23, n. 2, p. 137–148, mar. 1987.
- CLARKE, D.; MOHTADI, C.; TUFFS, P. Generalized predictive control - part II extensions and interpretations. **Automatica**, Elsevier BV, v. 23, n. 2, p. 149–160, mar. 1987.
- COCKBURN, J. Linear fractional representations of systems with rational uncertainty. In: **Proceedings of the 1998 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.98CH36207)**. [S.l.]: IEEE, 1998.
- COLMEGNA, P. H.; BIANCHI, F. D.; SANCHEZ-PENA, R. S. Automatic glucose control during meals and exercise in type 1 diabetes: Proof-of-concept in silico tests using a switched LPV approach. **IEEE Control Systems Letters**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 5, n. 5, p. 1489–1494, nov. 2021.
- COSTA, M.; REIS, F.; CAMPOS, J.; NOGUEIRA, F.; ALMEIDA, O. Robust MPC-LMI controller applied to three state switching cell boost converter. **Eletrônica de Potência**, v. 22, p. 81–90, 03 2017.
- COSTA, M. V. S. **Controladores Robustos D-LQI e D-Alocação de polos Otimizados via LMI Aplicados a um Conversor Boost Alto Ganho com Célula de Comutação Três Estados**. 122 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará - Centro de Tecnologia, Fortaleza - CE, 2012.

- COSTA, M. V. S. **Controle MPC Robusto Aplicado ao Conversor BOOST CCTE Otimizado por Inequações Matriciais Lineares**. 179 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Ceará - Centro de Tecnologia, Fortaleza - CE, 2017.
- CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 17, p. 72, 1979.
- CUTLER, C. R.; RAMAKER, B. L. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. In: **Joint Automatic Control Conference**. San Francisco, CA: [s.n.], 1980.
- CUZZOLA, F. A.; GEROMEL, J. C.; MORARI, M. An improved approach for constrained robust model predictive control. **Automatica**, v. 38, n. 7, p. 1183 – 1189, 2002. ISSN 0005-1098.
- DAI, T.; SZNAIER, M. Data driven robust superstable control of switched systems. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier BV, v. 51, n. 25, p. 402–408, 2018.
- DAIHA, H. R. **Projeto de controle de sistemas dinâmicos com comutação baseado em função de Lyapunov variante no tempo**. 132 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2020.
- DAIHA, H. R.; DEAECTO, G. S. *mscrH2* static output feedback switching function design based on a time-varying lyapunov function approach. **International Journal of Control**, Informa UK Limited, v. 94, n. 6, p. 1484–1491, aug 2019.
- DEAECTO, G.; GEROMEL, J. Controle de sistemas lineares com comutação. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, v. 19, 12 2008.
- DEAECTO, G. S. **Síntese de Controle para Sistemas Dinâmicos com Comutação**. 69 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2007.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Stability and performance of discrete-time switched linear systems. **Systems & Control Letters**, Elsevier BV, v. 118, p. 1–7, ago. 2018.
- DEY, P.; SAHA, A.; BHATTACHARYA, A.; MARUNGSRI, B. Analysis of the effects of PSS and renewable integration to an inter-area power network to improve small signal stability. **Journal of Electrical Engineering & Technology**, Springer Science and Business Media LLC, v. 15, n. 5, p. 2057–2077, ago. 2020.
- DONG, Y.; SONG, Y.; WANG, J.; ZHANG, B. Dynamic output-feedback fuzzy MPC for takagi-sugeno fuzzy systems under event-triggering-based try-once-discard protocol. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Wiley, v. 30, n. 4, p. 1394–1416, dez. 2020.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Modern Control Systems**. [S.l.]: Addison-Wesley; 8th edition, 1998. ISBN 0201308649.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistema de Controle Moderno**. [S.l.]: LTC, 1998. (Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.). ISBN 0201308649.
- DU, J.; ZHANG, L.; CHEN, J.; LI, J.; JIANG, X.; ZHU, C. Self-adjusted decomposition for multi-model predictive control of hammerstein systems based on included angle. **ISA Transactions**, Elsevier BV, v. 103, p. 19–27, ago. 2020.

- EGIDIO, L. N.; DEAECTO, G. S. Novel practical stability conditions for discrete-time switched affine systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 64, n. 11, p. 4705–4710, nov. 2019.
- EGIDIO, L. N.; DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C. Limit cycle global asymptotic stability of continuous-time switched affine systems. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier BV, v. 53, n. 2, p. 6121–6126, 2020.
- ESFAHANI, P. S.; PIEPER, J. K. Robust model predictive control for switched linear systems. **ISA Transactions**, Elsevier BV, v. 89, p. 1–11, jun. 2019.
- FINDEISEN, R. **Assessment and future directions of nonlinear model predictive control**. Berlin New York: Springer, 2007. ISBN 3540726985.
- FIRDAUS, A.; SHARMA, D.; MISHRA, S. Dynamic power flow based simplified transfer function model to study instability of low-frequency modes in inverter-based microgrids. **IET Generation, Transmission & Distribution**, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 14, n. 23, p. 5634–5645, dez. 2020.
- FORTES, E. de V. **Aplicação do Algoritmo Genético de CHU-BEASLEY Especializado no Ajuste dos Parâmetros dos controladores Suplementares e Dispositivos FACTS IPFC**. 220 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira - SP, 2016.
- FORTES, E. V.; ARAUJO, P. B.; MACEDO, L. H. Coordinated tuning of the parameters of PI, PSS and POD controllers using a specialized Chu-Beasley's genetic algorithm. **Electric Power Systems Research**, Elsevier BV, v. 140, p. 708–721, nov. 2016.
- FORTES, E. V.; MACEDO, L. H.; ARAUJO, P. B.; ROMERO, R. A VNS algorithm for the design of supplementary damping controllers for small-signal stability analysis. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, Elsevier BV, v. 94, p. 41–56, jan. 2018.
- FORTES, E. V.; MACEDO, L. H.; COSTA, M. V. S.; ARAUJO, P. B. Linear quadratic regulator applied to low-frequency oscillation damping using the current sensitivity model. In: **VIII Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos (SBSE)**. [S.l.: s.n.], 2020. p. 1–6.
- FORTES, E. V.; MACEDO, L. H.; MARTINS, L. F. B.; MIOTTO, E. L. A fireworks metaheuristic for the design of PSS and TCSC-POD controllers for small-signal stability studies. In: **15th Latin American Congress on Generation, Transmission and Distribution (CLAGTEE)**. [S.l.: s.n.], 2017. p. 1–6.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A. The projective method for solving linear matrix inequalities. **Mathematical Programming**, Springer Science and Business Media LLC, v. 77, n. 1, p. 163–190, abr. 1997.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A.; CHILALI, M. The LMI control toolbox. In: **Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control**. [S.l.]: IEEE, 1994.
- GENCELI, H.; NIKOLAOU, M. Robust stability analysis of constrained  $l_1$ -norm model predictive control. **AIChE Journal**, Wiley, v. 39, n. 12, p. 1954–1965, dez. 1993.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 45, n. 5, p. 1915–1930, jan. 2006.

- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of discrete time switched systems. **International Journal of Control**, Informa UK Limited, v. 79, n. 7, p. 719–728, jul. 2006.
- GUPTA, A. K.; SHUKLA, A.; VERMA, K.; NIAZI, K. R. Impact analysis and robust coordinated control of low frequency oscillations in wind integrated power system. In: **Power Systems**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2020. p. 273–292.
- HALL, R. A.; BRIDGEMAN, L. J. Computationally tractable stability criteria for exogenously switched model predictive control. **IEEE Control Systems Letters**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 5, n. 5, p. 1777–1782, nov. 2021.
- HAYNSWORTH, E. Determination of the inertia of a partitioned hermitian matrix. **Linear Algebra and its Applications**, v. 1, p. 73–81, 1968.
- HIMMELBLAU, D.; BISCHOFF, K. **Process Analysis and Simulation Deterministic System**. [S.l.]: New York, 1968.
- KAMARI, N. A. M.; MUSIRIN, I.; DAGANG, A. N.; ZAMAN, M. H. M. PSO-based oscillatory stability assessment by using the torque coefficients for SMIB. **Energies**, MDPI AG, v. 13, n. 5, p. 1231, mar. 2020.
- KAČUR, J.; FLEGNER, P.; DURDÁN, M.; LACIAK, M. Model predictive control of ugc: An experiment and simulation study. **Information Technology and Control**, v. 48, n. 4, p. 557–578, 2019. Cited By 0.
- KHAN, S. A.; GUO, Y.; KHAN, M. N. H.; SIWAKOTI, Y.; ZHU, J.; BLAABJERG, F. A novel single source three phase seven-level inverter topology for grid-tied photovoltaic application. In: **2020 IEEE 9th International Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC2020-ECCE Asia)**. [S.l.]: IEEE, 2020. p. 372–376.
- KIANI, E.; GANJI, B.; TAHER, S. A. Model predictive control of switched reluctance generator based on z-source converter for wind power applications. **International Transactions on Electrical Energy Systems**, Wiley, v. 30, n. 11, ago. 2020.
- KOTHARE, M.; BALAKRISHNAN, V.; MORAI, M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. **Automatica**, v. 32, p. 440 – 444 vol.1, 01 1996.
- KUNDUR, P. **Power system stability and control**. New York: McGraw-Hill, 1994. ISBN 978-0070359581.
- KUNZLER, L. M.; AMITKUMAR, K.; LOPES, L. A.; PILLAY, P.; BÉLANGER, J. Parallel hybrid linear-switched power amplifier and control strategy for machine emulation. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, Elsevier BV, v. 131, p. 107063, out. 2021.
- LAKSHMI, A. V.; MANYALA, R. R.; MANGIPUDI, S. K. Design of a robust PID-PSS for an uncertain power system with simplified stability conditions. **Protection and Control of Modern Power Systems**, Springer Science and Business Media LLC, v. 5, n. 1, set. 2020.
- LEITE, K. de S. **Estudo de um Sistema de Nível com dois Tanques Interligados Sujeitos a Perturbação Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares**. 116 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará - Centro de Tecnologia, Fortaleza - CE, 2012.

LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Hybrid state feedback stabilization with performance for discrete-time switched linear systems. **International Journal of Control**, Informa UK Limited, v. 81, n. 7, p. 1114–1124, jul. 2008.

LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 54, n. 2, p. 308–322, fev. 2009.

LIU, X.; ZHANG, Z.; YANG, X.; GARCIA, C.; RODRIGUEZ, J. Fixed switching frequency predictive control for PMSM drives with guaranteed control dynamics. In: **2020 IEEE 9th International Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC2020-ECCE Asia)**. [S.l.]: IEEE, 2020. p. 3033–3038.

LÖFBERG, J. A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: . [S.l.: s.n.], 2004. p. 284 – 289. ISBN 0-7803-8636-1.

LÖFBERG, J. Automatic robust convex programming. **Optimization methods and software**, Taylor & Francis, v. 27, n. 1, p. 115–129, 2012.

MA, X.-J.; SUN, Z.-Q.; HE, Y.-Y. Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 6, n. 1, p. 41–51, Feb 1998. ISSN 1941-0034.

MAGDY, M.; MARHOMY, A. E.; ATTIA, M. A. Modeling of inverted pendulum system with gravitational search algorithm optimized controller. **Ain Shams Engineering Journal**, Elsevier BV, v. 10, n. 1, p. 129–149, mar. 2019.

MARCOLINO, M. H.; GALVÃO, R. K. H.; KIENITZ, K. H. Predictive control of linear systems with switched actuators subject to dwell-time constraints. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Springer Science and Business Media LLC, v. 32, n. 1, p. 1–17, nov. 2020.

MARTINS, L. F. B.; ARAUJO, P. B.; FORTES, E. V.; MACEDO, L. H. Design of the PI–UPFC–POD and PSS damping controllers using an artificial bee colony algorithm. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Springer Science and Business Media LLC, v. 28, n. 6, p. 762–773, set. 2017.

MONASTERIOS, P. R. B.; TRODDEN, P. A. Coalitional predictive control: Consensus-based coalition forming with robust regulation. **Automatica**, Elsevier BV, v. 125, p. 109380, mar. 2021.

MORARI, M.; LEE, J. H. Model predictive control: past, present and future. **Computers & Chemical Engineering**, Elsevier BV, v. 23, n. 4-5, p. 667–682, maio 1999.

MOREIRA, T. B. S.; COSTA, M. V. S.; NOGUEIRA, F. G. Offline FMPC applied to the 3ssc boost converter. In: **Anais do Congresso Brasileiro de Automática 2020**. [S.l.]: sbabra, 2020.

NABAIS, M.; LEMOS, J. M. Distributed adaptive predictive control based on switched multiple models and ADMM. In: **Lecture Notes in Electrical Engineering**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2020. p. 253–262.

OGATA, K. **Discrete-Time Control Systems**. New Jersey: Prentice Hall, 1998. ISBN 0-13-216-102-8.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. [S.l.]: Prentice Hall Brasil, 2011. ISBN 9788576058106.

ORAVEC, J.; HORVÁTHOVÁ, M.; BAKOŠOVÁ, M. Multivariable robust MPC design for neutralisation plant: Experimental analysis. **European Journal of Control**, Elsevier BV, ago. 2020.

PACKARD, A.; DOYLE, J. The complex structured singular value. **Automatica**, v. 29, n. 1, p. 71 – 109, 1993. ISSN 0005-1098.

PERLMUTTER, D. **Stability of chemical reactors**. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall, 1972. ISBN 0138399697.

POUR, F. K.; THEILLIOL, D.; PUIG, V.; CEMBRANO, G. Health-aware control design based on remaining useful life estimation for autonomous racing vehicle. **ISA Transactions**, Elsevier BV, v. 113, p. 196–209, jul. 2021.

PREUSS, V. H. B. **Estudo e Aplicação de um Controlador Preditivo Robusto com Estimação Recursiva do Polítopo de Incerteza**. 85 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville - SC, 2016.

QIN, S. J.; BADGWELL, T. A. An overview of nonlinear model predictive control applications. In: ALLGÖWER, F.; ZHENG, A. (Ed.). Basel: Birkhäuser Basel, 2000. p. 369–392. ISBN 978-3-0348-8407-5.

RAMOS, L. de M. **Teorema de Schur no Plano de Minkowski e caracterização de Hélices Inclinadas no Espaço de Minkowski**. 76 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos - SP, 2013.

REGO, R.; COSTA, M. Output feedback robust control with anti-windup applied to the 3ssc boost converter. **IEEE Latin America Transactions**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 18, n. 05, p. 874–880, maio 2020.

REGO, R. C. B. **Controle MPC Robusto Com ANTI-WINDUP aplicado a sistemas LPV e LTV Baseado no Algoritmo QUASI-MIN-MAX Com Relaxação em LMIs**. 98 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró - RN, 2019.

RIBEIRO, R. **Implementação de um sistema de controle de um pêndulo invertido**. 86 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá-MG, 2007.

RICHALET, J.; RAULT, A.; TESTUD, J.; PAPON, J. Model predictive heuristic control. **Automatica**, Elsevier BV, v. 14, n. 5, p. 413–428, set. 1978.

SHINNERS, S. **Modern Control System Theory and Design**. [S.l.]: Wiley, 1998. (A Wiley interscience publication). ISBN 9780471249061.

SILVA, E. A. da. **Construção, Modelagem e Controle de um Pêndulo Invertido com CLP e Software SCADA**. 79 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”, Câmpus de Ilha Solteira - SP, 2013.

SLEIMAN, J.-P.; FARSHIDIAN, F.; MINNITI, M. V.; HUTTER, M. A unified MPC framework for whole-body dynamic locomotion and manipulation. **IEEE Robotics and Automation Letters**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 6, n. 3, p. 4688–4695, jul. 2021.

- STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, Informa UK Limited, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, jan. 1999.
- SZNAIER, M. Control oriented learning in the era of big data. **IEEE Control Systems Letters**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 5, n. 6, p. 1855–1867, dez. 2021.
- TEIXEIRA, M.; ASSUNCAO, E.; AVELLAR, R. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 11, n. 5, p. 613–623, out. 2003.
- TEIXEIRA, M.; PIETROBOM, H.; ASSUNÇÃO, E. Novos resultados sobre estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy e lmi. v. 11, 01 2000.
- THAKALLAPPELLI, A.; MEHRA, R.; MANGALVEDEKAR, H. A. Differentiation of faults from power swings and detection of high impedance faults by distance relays. In: **2013 IEEE 1st International Conference on Condition Assessment Techniques in Electrical Systems (CATCON)**. [S.l.]: IEEE, 2013.
- TIAN, X.; PENG, H.; ZHOU, F.; PENG, X. RBF-ARX model-based fast robust MPC approach to an inverted pendulum. **ISA Transactions**, Elsevier BV, v. 93, p. 255–267, out. 2019.
- TOH, K.; TODD, M.; TütüNCü, R. Sdpt3-a matlab software package for semidefinite programming, version 1.3. **Optimization Methods and Software**, v. 11, n. 1-4, p. 545–581, 1999.
- VANDENBERGHE, L.; BOYD, S. Semidefinite programming. **SIAM Review**, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 38, n. 1, p. 49–95, mar. 1996.
- VARGAS, E. H.; COLANERI, P.; MIDDLETON, R.; BLANCHINI, F. Discrete-time control for switched positive systems with application to mitigating viral escape. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Wiley, v. 21, n. 10, p. 1093–1111, jul. 2010.
- WAN, Z.; KOTHARE, M. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. **Automatica**, Elsevier Limited, v. 39, n. 5, p. 837–846, 5 2003. ISSN 0005-1098.
- WAN, Z.; KOTHARE, M. V. Robust output feedback model predictive control using off-line linear matrix inequalities. **Journal of Process Control**, v. 12, n. 7, p. 763 – 774, 2002. ISSN 0959-1524.
- WANG, X.; LI, S.; SU, S.; TANG, T. Robust fuzzy predictive control for automatic train regulation in high-frequency metro lines. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 27, n. 6, p. 1295–1308, jun. 2019.
- WANG, X.; LI, S.; TANG, T. Periodically intermittent cruise control of heavy haul train with uncertain parameters. **Journal of the Franklin Institute**, Elsevier BV, v. 356, n. 13, p. 6989–7008, set. 2019.
- WANG, X.; LI, S.; TANG, T. Robust optimal predictive control of heavy haul train under imperfect communication. **ISA Transactions**, Elsevier BV, v. 91, p. 52–65, ago. 2019.

WANG, Y.; BOYD, S. Fast evaluation of quadratic control-lyapunov policy. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 19, n. 4, p. 939–946, jul. 2011.

WU, S.-P.; BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. FIR filter design via semidefinite programming and spectral factorization. In: **Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control**. [S.l.]: IEEE, 1996.

YANG, N.; LIU, Q.; MCCLELLY, J. D. TCSC controller design for damping interarea oscillations. **IEEE Transactions on Power System**, Piscataway, v. 13, n. 14, p. 1304–1310, 1998.

ZAFIRIOU, E. Robust model predictive control of processes with hard constraints. **Computers & Chemical Engineering**, Elsevier BV, v. 14, n. 4-5, p. 359–371, maio 1990.

ZAHAF, A.; BOUOUDEN, S.; CHADLI, M. Constrained fuzzy predictive control design based on the PDC approach. In: **Lecture Notes in Electrical Engineering**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2016. p. 140–154.